La spirale di Archimede

di Antonino Giambò

1. In un precedente articolo pubblicato su questa stessa rubrica ho scritto dei tentativi degli antichi geometri di risolvere con mezzi "illegali", peraltro riuscendovi, alcuni problemi che non furono in grado di risolvere con il solo ausilio degli strumenti riga e compasso.

Di uno di questi problemi, ed esattamente della quadratura del cerchio, si occupò anche il grande Archimede (287 ca. – 212 a.C.), il quale risolse il problema utilizzando una curva da lui medesimo costruita, la spirale.

Non ne ho trattato in quell'articolo poiché ritengo che il contributo di Archimede meriti un'attenzione particolare, poiché va ben oltre la quadratura del cerchio e richiede, pertanto, una trattazione a sé

È l'obiettivo che mi sono proposto con la stesura del presente articolo, consapevole tuttavia che tutto ciò che esporrò è noto ai più. Ma forse può essere utile a qualcuno.

2. Il celebre scienziato siracusano tratta dell'argomento in un'opera dal titolo **Spirali**, alla quale fa da premessa una lettera indirizzata a Dositeo di Pelusio (III sec. a.C.), matematico egizio, attivo ad Alessandria. In questa lettera Archimede, tra l'altro, anticipa i suoi risultati, comprese la definizione di spirale, la dimostrazione relativa alla quadratura del cerchio e quelle relative ad altre superfici.

L'opera è un trattato composto da 28 proposizioni, che in [2] occupa meno di 80 pagine (dalla 316 alla 393), compresi gli ampi e ottimi commenti di Frajese e le pagine bianche o quasi bianche.

Le prime 11 proposizioni sono considerazioni preliminari: «un insieme di lemmi necessari per la trattazione seguente» le definisce Frajese [2, pag. 314] o, come dice lo stesso Archimede [2, pag. 321]: «vengono premesse … le cose che son necessarie per la loro dimostrazione», cioè la dimostrazione delle proprietà della spirale.

Detto per inciso, nelle proposizioni dalla 5 alla 9 Archimede si occupa di *problemi di inserimento*, ovvero di problemi – anch'essi non risolvibili con l'uso esclusivo di riga e compasso – in cui è richiesto di inserire tra una retta e una circonferenza assegnate un segmento che soddisfi ad una determinata condizione.

Tra le proposizioni 11 e 12 vi sono 7 definizioni, la prima delle quali è proprio la definizione di spirale.

Seguono le ultime 17 proposizioni.

Nella proposizione 13 si parla, ma in modo intuitivo, di tangente alla spirale, senza spiegare come si ottenga. È comunque il primo caso di tangente ad una curva che non sia una circonferenza.

La quadratura del cerchio, ovviamente con l'uso della spirale, è trattata nella proposizione 18.

Nell'opera figura inoltre la risoluzione di un interessante problema: il calcolo dell'area di una particolare superficie a contorno mistilineo, cioè in parte curvilineo e in parte rettilineo (proposizione 24), al quale segue il calcolo di altre aree dello stesso tipo (proposizione 27).

Non figura invece nelle *Spirali* la risoluzione del problema della trisezione di un angolo, di cui Archimede stranamente non si occupa, quantunque il problema possa essere risolto con l'impiego della spirale. Noi comunque lo faremo e faremo vedere come ciò avvenga.

Bisogna dire che, per le sue dimostrazioni, Archimede si serve del metodo di esaustione, inventato da Eudosso di Cnido (IV sec. a.C.). Questo rende la comprensione dell'opera particolarmente difficoltosa, tanto che nell'epoca del Rinascimento europeo vi furono studiosi che non la compresero e qualcuno, sbagliando, giudicò addirittura errati i risultati e i ragionamenti di Archimede sulle spirali [1, pag. 95].

Noi, comunque, pur soffermandoci sulla dimostrazione delle proposizioni che ci interessa affrontare, non lo faremo con il metodo di Archimede, ma utilizzeremo le conoscenze che la moderna analisi matematica ci mette a disposizione. Pure il linguaggio che useremo, e parliamo anche del linguaggio simbolico, non sarà certamente quello di Archimede che, in verità, non disponeva di alcun simbolismo.

3. Incominciamo con la definizione della spirale di Archimede.

Al riguardo supponiamo che un punto P si muova di moto uniforme su una semiretta di origine O, a partire da O, e contemporaneamente la semiretta ruoti intorno ad O di moto uniforme, mantenendosi nello stesso piano. Il punto O rimane fisso. Come risultante dei due moti, il punto P descrive una curva piana, che

Archimede chiamò *spirale* (ἑλίκή, *elike*) e che in seguito sarà denominata ***spirale di Archimede*** [1]. Può essere una spirale *destrorsa* (detta anche *oraria* – figura 1a) o *sinistrorsa* (detta anche *antioraria* – figura 1b) a seconda del verso di rotazione della retta r.

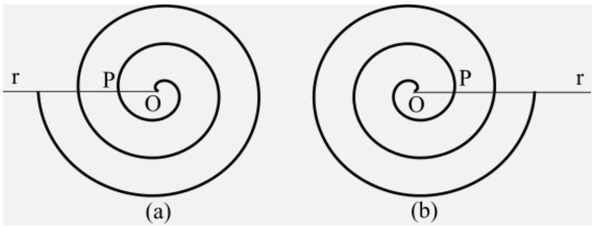

figura 1

Occorre dire che Archimede si affida, nei disegni che affiancano la sua esposizione, a spirali destrorse, mentre noi, per comodità di ragionamento, faremo riferimento a spirali sinistrorse.

Il punto O è detto *origine della spirale*; la posizione della semiretta Or all'inizio della rotazione si definisce *origine della rotazione*.

Naturalmente ci possiamo chiedere come abbia fatto Archimede a costruire la sua spirale. Figura che egli dà per acquisita. Possiamo fare solamente delle ipotesi. E una è la seguente: si considera un certo numero di circonferenze concentriche con raggi via via crescenti secondo la serie dei numeri naturali: 1-2-3-4-5-… (fino a 11 in figura 2). Si suddivide il piano in un conveniente numero di angoli uguali (16 in figura 2), aventi il vertice nel centro delle circonferenze. Si opera una costruzione come quella proposta nella figura sottostante, dove la spirale è in realtà una spezzata.

Ovviamente più vicine sono le circonferenze e più numerosi sono gli angoli in cui il piano è suddiviso, più la spezzata si avvicina ad una curva "senza spigoli". E inoltre, più numerose sono le circonferenze, più lungo è il tratto di spirale che ne scaturisce.

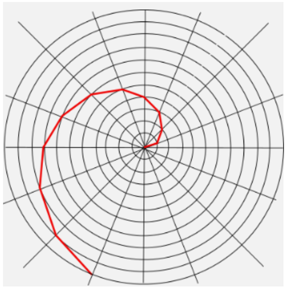

figura 2

figura 3

Ma un'altra domanda sorge spontanea: com'è venuta in mente ad Archimede l'idea di occuparsi di una curva come la spirale, che non è esattamente una curva intuitiva?

Ebbene, anche se non è vero, mi piace pensare che egli abbia "visto" una spirale osservando una corda opportunamente arrotolata (figura 3) e successivamente, avendo una mente speculativa come pochi, si sia posto il problema di enunciarne e dimostrarne le proprietà.

A parte la corda arrotolata, esistono in natura corpi che hanno la forma di una spirale di Archimede.

Due esempi: il primo è fornito dai solchi dei dischi in vinile, detti anche microsolchi. Si tratta di oggetti che oggigiorno sono diventati veri e propri cimeli, roba per amatori e collezionisti, ma che non molti anni addietro erano di largo uso e consumo da parte di chi voleva ascoltare musica. Il secondo esempio è costituito dalla forma della maggior parte delle galassie, compresa la Via Lattea, vale a dire la "nostra" galassia, la Galassia per antonomasia.

---

[1] È superfluo sottolineare che la spirale di Archimede non è l'unica spirale di cui si occupa la Matematica, ma è solamente quella che qui ci interessa prendere in considerazione.

4. Descriviamo adesso, alla luce della moderna analisi matematica. alcune proprietà della spirale che ci torneranno utili nel seguito.

Riferiamo per questo il piano di una spirale (sinistrorsa) ad un sistema levogiro di assi cartesiani (Oxy) in modo che l'origine O coincida con il punto origine della spirale, il semiasse positivo delle x coincida con la semiretta origine della rotazione e l'asse y sia perpendicolare all'asse x (figura 5).

Indichiamo con ρ lo spazio percorso dal punto P sulla semiretta Or. Se è v la velocità (costante) di P e se nell'istante iniziale $t=0$, in cui ha inizio il moto, P si trova in O, risulta: $\rho=vt$.

Sia φ l'angolo descritto dalla semiretta Or nella sua rotazione uniforme intorno ad O. Ammesso che sia ω la velocità angolare (costante) e supposto che nell'istante $t=0$ la semiretta Or coincida con il semiasse positivo Ox, si ha: $\varphi=\omega t$.

Ebbene, nel piano cartesiano (Oxy) il punto P ha coordinate (x, y) tali che:

$$\text{[1]} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}.$$

Si ottengono in questo modo le equazioni parametriche della spirale. Da esse si ha in successione:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \quad \text{da cui segue:} \quad x^2 + y^2 = (v\,t)^2 \quad \text{o anche:} \quad \sqrt{x^2+y^2} = vt.$$

D'altro canto: $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$ e $t = \frac{\varphi}{\omega}$. Pertanto:

$$\text{[2]} \qquad \rho = \frac{v}{\omega}\,\varphi\,.$$

Si ricava così l'equazione polare della spirale nel sistema polare (Oρφ) associato al sistema cartesiano (Oxy). Questa equazione fornisce anche una caratteristica della spirale di Archimede, che è assunta a volte come definizione della spirale medesima, ossia il luogo geometrico del punto P la cui distanza da un punto fisso O (*raggio vettore*) è direttamente proporzionale all'ampiezza dell'angolo descritto dalla semiretta OP mentre ruota intorno ad O. La costante di proporzionalità è evidentemente il rapporto v/ω.

Questo fatto può essere espresso anche con la seguente proporzione:

$$\text{[3]} \qquad \rho_1 : \rho_2 = \varphi_1 : \varphi_2\,,$$

dove ρ_1 e ρ_2 sono due qualsiasi raggi vettori e φ_1 e φ_2 i corrispondenti angoli descritti dalla semiretta ruotante.

Archimede enuncia questa proprietà fondamentale della spirale nella proposizione 14, con un linguaggio retorico, ovviamente, ma concettualmente equivalente alla proporzione suddetta.

Osserviamo che, per $\varphi=2\pi$, si ottiene la lunghezza del segmento OA, che è denominato *passo* della spirale. Esso rappresenta anche la distanza costante fra due spire consecutive della spirale stessa.

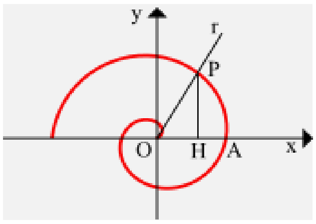

figura 4

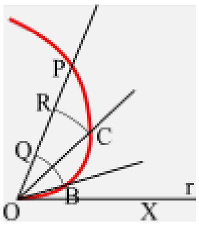

figura 5

5. La spirale di Archimede, una volta disegnata in un piano, permette di **trisecare un angolo**.

Si disegna una spirale (sinistrorsa) di origine O, nella quale sia Or l'origine della rotazione. Sia poi dato un angolo di ampiezza α. Si riporta questo angolo nella posizione $X\hat{O}P$, essendo X un punto della semiretta Or e P un punto situato sulla spirale (figura 5).

Si divide il segmento OP in tre parti uguali e siano Q e R i punti di divisione, per cui $OQ=QR=RP$.

Si tracciano le circonferenze di centro O e di raggi OQ ed OR e siano nell'ordine B e C i punti in cui essi intersecano la spirale. Siccome $OB=OQ$, evidentemente risulta: $OP = 3\,OB$.

Ricordato che $X\hat{O}P=\alpha$, si pone $X\hat{O}B=\alpha_1$. Tenendo allora presente la proporzione [3], si ha:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \frac{\alpha}{\alpha_1} \quad \text{e siccome } \overline{OP} = 3\,\overline{OB} \quad \text{allora} \quad \alpha = 3\,\alpha_1\,. \qquad \text{[c.v.d.]}$$

Come nel caso della trisettrice (di cui mi sono occupato nell'articolo succitato), anche con l'uso della spirale di Archimede l'angolo α può essere suddiviso in un numero qualsiasi n di parti uguali: è sufficiente ripetere il ragionamento precedente dopo aver diviso OP in n parti uguali, invece che soltanto in tre.

6. Occupiamoci adesso del problema della quadratura del cerchio. Riguardo a questo problema, occorre registrare che Archimede ne fornisce una soluzione "approssimata" nel piccolo trattato *Misura del cerchio*. Egli trova precisamente che una circonferenza di diametro 1 ha una lunghezza compresa fra $3+10/71$ e $3+10/70$. Intervallo che poi fornisce il valore (approssimato) 3,14 di π. Una volta ottenuta la rettificazione della circonferenza, la quadratura del cerchio è cosa fatta. Essa, com'è noto, passa per l'equivalenza fra il cerchio e un triangolo rettangolo avente come cateti il suo raggio e la circonferenza rettificata. Proprietà, questa, che è dimostrata dallo stesso Archimede nella proposizione 1 del libro *Misura del cerchio*.

Con l'uso della spirale Archimede dà invece una soluzione "esatta" del problema.

Ma anche in questo modo la **quadratura del cerchio** è ottenuta indirettamente, nel senso che è ottenuta la **rettificazione della circonferenza** e, di conseguenza, la quadratura del cerchio.

Archimede dimostra dapprima che la lunghezza di un quarto di circonferenza è uguale a quella di un determinato segmento tangente alla spirale (proposizione 18) e successivamente generalizza la questione dimostrando che un qualsiasi arco di circonferenza è lungo quanto un certo altro segmento tangente alla spirale (proposizione 20).

Precisiamo questi fatti, ma nel nostro linguaggio grafico e simbolico.

In relazione alla proposizione 20 (figura 6), posto che sia R il raggio della circonferenza da rettificare, si prende sulla spirale il punto P tale che sia $\overline{OP}=R$. Si tracciano quindi la retta OP, la perpendicolare ad OP condotta per O e la tangente alla spirale nel punto P, la quale interseca l'asse x nel punto T. Sia A il punto in cui si intersecano le ultime due rette. Si traccia inoltre l'arco PQ di circonferenza avente il centro in O e come estremi il punto P e il punto Q della semiretta Or. Si dimostra che l'arco PQ è lungo quanto il segmento OA.

Ebbene, Archimede dimostra ciò ragionando per assurdo. Dimostra precisamente che la lunghezza dell'arco PQ non può essere maggiore né minore di quella del segmento OA e perciò deve essere uguale a quella di OA.

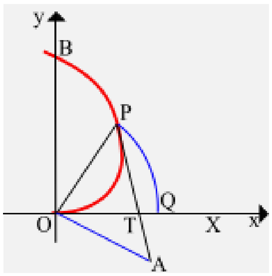

figura 6

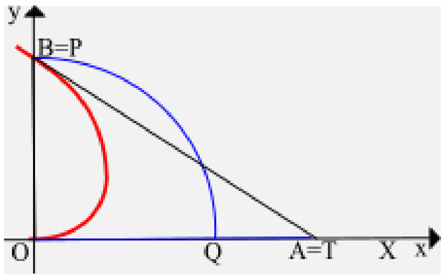

figura 7

Naturalmente, con riferimento alla proposizione 18 (figura 7):

- il punto P, dopo una rotazione della semiretta Or di ampiezza $\pi/2$, cade in B, cioè nel punto in cui la spirale interseca l'asse y, per cui l'arco PQ è adesso un quarto di circonferenza;
- il punto A, intersezione della tangente alla spirale in B, coincide adesso con il punto T;
- anche adesso si dimostra che l'arco PQ è lungo quanto il segmento OA.

E anche in questo caso Archimede dimostra che la lunghezza dell'arco PQ non può essere maggiore né minore di quella del segmento OA e perciò deve essere uguale a quella di OA.

Una volta rettificata la circonferenza, la cui lunghezza è 4 volte il segmento OA, il passaggio alla costruzione di un quadrato equivalente al cerchio (quadratura del cerchio) è operazione del tutto elementare.

Noi dimostreremo dapprima la proposizione 20, s'intende con gli strumenti che l'analisi matematica ci mette a disposizione, e successivamente la proposizione 18 come caso particolare.

Andiamo alla dimostrazione della proposizione 20, cioè dell'uguaglianza $\text{arco}(PQ)=\overline{OA}$ (figura 6).

Possiamo costatare per prima cosa che, se è di α radianti l'ampiezza dell'angolo $Q\widehat{O}P$, tenendo presente che è R il raggio della circonferenza cui appartiene l'arco PQ, la lunghezza di questo arco è la seguente:

$$\text{arco}(PQ) = R\alpha\,.$$

Bisogna dimostrare pertanto che anche il segmento OA è lungo $R\alpha$.

Costatato che $\overline{OA}=\overline{OP}\tan O\widehat{P}A = R\tan O\widehat{P}A$, basta dimostrare, in ultima analisi, che $\tan O\widehat{P}A = \alpha$.

Tenendo allora presente che $\rho=\frac{v}{\omega}\varphi$, le equazioni parametriche [1] della spirale possono essere scritte così:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{\omega}\varphi\cos\varphi \\ y = \dfrac{v}{\omega}\varphi\sin\varphi \end{cases}.$$

Possiamo adesso calcolare la pendenza dy/dx della spirale nel punto P di coordinate polari $\big(\alpha,\rho(\alpha)\big)$, vale a dire la pendenza della retta PA, ossia $\tan\vartheta$, dove ϑ è l'angolo che la retta PA forma con l'asse x, vale a dire l'angolo $X\widehat{T}P$.

Anzitutto calcoliamo $dx/d\varphi$ e $dy/d\varphi$, tenendo presente che v/ω è una costante:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{v}{\omega}\cos\varphi - \frac{v}{\omega}\varphi\sin\varphi\,,\quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{v}{\omega}\sin\varphi + \frac{v}{\omega}\varphi\cos\varphi\,.$$

Pertanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{v}{\omega}\sin\varphi + \frac{v}{\omega}\varphi\cos\varphi}{\frac{v}{\omega}\cos\varphi - \frac{v}{\omega}\varphi\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}.$$

Di conseguenza, per $\varphi=\alpha$:

$$\tan\vartheta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi=\alpha} = \frac{\sin\alpha + \alpha\cos\alpha}{\cos\alpha - \alpha\sin\alpha}.$$

Osserviamo adesso che, in virtù di una proprietà dell'angolo esterno di un triangolo, si ha:

$$O\widehat{P}A = O\widehat{P}T = X\widehat{T}P - T\widehat{O}P = \vartheta - \alpha\,.$$

Pertanto:

$$\tan O\widehat{P}A = \tan(\vartheta-\alpha) = \frac{\tan\vartheta - \tan\alpha}{1+\tan\vartheta\tan\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha + \alpha\cos\alpha}{\cos\alpha - \alpha\sin\alpha} - \tan\alpha}{1 + \frac{\sin\alpha + \alpha\cos\alpha}{\cos\alpha - \alpha\sin\alpha}\cdot\tan\alpha}.$$

A conti fatti, dopo alcune semplici elaborazioni, si trova: $\tan O\widehat{P}A = \alpha$. [c.v.d.]

Ovviamente questo vale anche nel caso particolare in cui $\alpha=\pi/2$, ossia nel caso della proposizione 18.

Ma ne vogliamo dare ugualmente una dimostrazione diretta. Si tratta di far vedere che $\tan O\widehat{P}A = \pi/2$.

Indicando sempre con ϑ l'angolo che la tangente PT alla spirale forma con l'asse x, vale a dire l'angolo $X\widehat{T}P$, si costata subito che si ha:

$$O\widehat{P}A = \vartheta - \frac{\pi}{2} \quad \text{per cui:}\quad \tan O\widehat{P}A = -\frac{1}{\tan\vartheta}.$$

D'altro canto, rifacendoci alla situazione precedente, che non ripetiamo, risulta:

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}.$$

Di conseguenza:

$$\tan O\widehat{P}A = -\frac{1}{-2/\pi} = \frac{\pi}{2}\,. \qquad \text{[c. v. d.]}$$

7. S'impone una riflessione. Archimede, come si sa, dimostra le varie proposizioni che enuncia, utilizzando il metodo di esaustione. Questo metodo, com'è ben noto, non ha valore euristico ma solo dimostrativo. Ciò significa che egli doveva già disporre di ipotesi sulle quali ragionare. È risaputo che queste ipotesi scaturivano in realtà da vere e proprie scoperte che egli otteneva servendosi di un "metodo meccanico" da lui inventato e che è descritto nel trattato denominato brevemente *Metodo*, che, come si sa, era andato perduto e fu riscoperto solo nel 1906.

Ma, ed è questa la domanda cruciale, come ha fatto Archimede a scoprire che l'arco di circonferenza PQ è lungo quanto il segmento OA (figure 6 e 7), considerato che è inverosimile che si sia potuto servire in questo caso del suo "metodo meccanico"?

Lo scienziato non lo svela e noi non possiamo fare altro che congetture.

Boyer, per esempio, ipotizza che Archimede «abbia trovato (mediante il parallelogramma delle velocità) la direzione del moto (e pertanto, la direzione della tangente alla curva) calcolando la risultante dei due moti» cui è sottoposto il punto P che genera la spirale ([3], pag. 150). E in questo modo, dopo aver dimostrato come si costruisce la tangente alla spirale in un suo punto, avrebbe poi ottenuto la rettificazione dell'arco di circonferenza utilizzando il metodo di esaustione.

Ora, detto francamente, questa ipotesi sembra poco plausibile e non si esclude che Boyer si sia lasciato suggestionare da una dimostrazione simile fornita dal matematico francese Gilles Personne de Roberval (1602-1675) e pure dallo scienziato italiano Evangelista Torricelli (1608-1647).

Roberval ideò nel 1638 un metodo per costruire la tangente ad una curva (la cicloide, nella fattispecie) in un suo qualsiasi punto. Egli non pubblicò il risultato, limitandosi a comunicarlo a padre Marin Mersenne (1588-1648) il quale lo rese noto nel 1644 al College Royal di Parigi.

Il lavoro di Roberval fu poi pubblicato nel 1668 con il titolo *Observations sur le composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes* (*Osservazioni sulla composizione dei moti e sul modo di trovare le tangenti ad una linea curva*).

Nello stesso anno 1644 Torricelli pubblicava il suo unico libro, *Opera geometrica*, composto di tre parti: *De sphaera et solidis spaeralibus, De motu gravium, De dimensione parabolae*. In appendice all'ultima opera è descritto un metodo analogo a quello di Roberval per la costruzione della tangente ad una curva (ancora la cicloide) in un suo qualsiasi punto.

Ma andiamo a descrivere il metodo ideato da Roberval e Torricelli per trovare le tangenti ad una curva e questo ci dirà perché è poco verosimile l'ipotesi di Boyer.

Alla base c'è l'idea, ampiamente utilizzata in Fisica, che, in una data posizione P, la velocità di un punto materiale che descrive una linea curva abbia la direzione della tangente alla curva nel punto P e sia la risultante di due velocità, le cui direzioni sono una perpendicolare all'altra: la *velocità radiale* **v** e la *velocità trasversale* **w** del punto materiale.

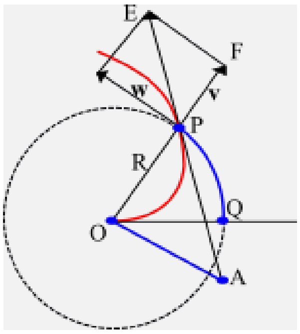

figura 8

Con riferimento alla spirale di Archimede (figura 8), questa velocità è rappresentata dal vettore $\overrightarrow{PE}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$.

Questa costruzione, effettivamente, permette anche di calcolare la lunghezza del segmento OA e di scoprire che questa lunghezza è esattamente uguale a quella dell'arco PQ della circonferenza di centro O e raggio R.

Di fatto – indicati con α l'ampiezza dell'angolo $Q\hat{O}P$ e con t il tempo impiegato dal punto che genera la spirale per descrivere l'arco OP – il modulo di **v**, vale a dire la velocità del punto che genera la spirale lungo la semiretta ruotante, è precisamente $v=R/t$, mentre il modulo di **w** è $w=\omega R$, vale a dire la velocità di un punto materiale in moto uniforme con velocità angolare ω su una circonferenza di raggio R e centro O. Nel nostro caso è anche $\omega=\alpha/t$. Ora, dall'evidente similitudine dei triangoli rettangoli OPA e FPE segue:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{PE}} \quad \text{ovvero:} \quad \frac{\overline{OA}}{R}=\frac{w}{v} \quad \text{o anche:} \quad \frac{\overline{OA}}{R}=\frac{\frac{\alpha}{t}R}{\frac{R}{t}}.$$

E pertanto: $\overline{OA}=R\alpha$, che è esattamente la lunghezza dell'arco PQ.

Com'è evidente, col ragionamento di Roberval-Torricelli, non solo si costruisce la tangente alla spirale in un suo punto e non solo si dimostra, in modo diretto, che l'arco di circonferenza PQ è lungo quanto il segmento OA, ma lo si scopre proprio questo risultato.

Ora, se questo, come ipotizza Boyer, fosse stato anche il ragionamento seguito da Archimede, che motivo avrebbe avuto lo scienziato siracusano di chiamare in causa il complicato metodo di esaustione?

Sembra per giunta, contrariamente a quanto suppone Boyer, che la regola del parallelogramma non fosse nota ad Archimede, essendone attribuita la scoperta allo scienziato belga Simon Stevin (1548-1620), che l'ha certamente dimostrata e applicata (benché riferita alle forze) nel 1586 nei suoi studi sulla Statica.

È insomma assai probabile che Archimede abbia scoperto in tutt'altra maniera il risultato che poi ha potuto dimostrare con il metodo di esaustione, in una maniera che a noi rimane purtroppo sconosciuta.

Dice Frajese al riguardo [2, pag. 356]: «Archimede dovette *intuire* in qualche modo il risultato. E che questo risultato fosse *semplice* poteva da lui essere previsto in base ad una *evidente fiducia nella semplicità delle leggi geometriche*».

8. Com'è già stato anticipato, la proposizione 24 delle *Spirali* offre un esempio di calcolo dell'area di una superficie con contorno mistilineo. Questa superficie è quella descritta dalla semiretta Or nella prima rotazione completa (è evidenziata in figura 9).

Archimede dimostra che l'area di questa superficie è $1/3$ dell'area del cerchio che avvolge la spirale, vale a dire del cerchio di raggio OA e centro O. Anche questo egli dimostra con un ragionamento per assurdo, servendosi del metodo di Eudosso. E anche adesso noi ci serviremo dell'analisi matematica.

Ma prima di andare a questa dimostrazione, può essere interessante sottolineare una curiosità. Nella dimostrazione della proposizione 24 Archimede utilizza un risultato enunciato e dimostrato nella proposizione 10, la quale afferma sostanzialmente che vale la seguente uguaglianza, dove n è un numero intero:

$$n^2(n+1)+(1+2+...+n) = 3\,(1^2+2^2+...+n^2)\,.$$

Per noi, che disponiamo di un agile simbolismo algebrico, la sua dimostrazione, per quanto non semplicissima, non presenta eccessive difficoltà, ma si pensi cosa dovette rappresentare per Archimede.

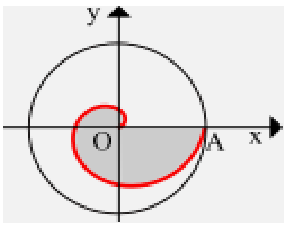

figura 9

Ritornando alla proposizione 24, bisogna dunque dimostrare che l'area S della superficie generata dalla semiretta Or nella sua prima rotazione completa intorno ad O è:

$$S=\frac{1}{3}\pi R^2\,,$$

avendo posto $\overline{OA}=R$. Di fatto, ricordando che $\rho=\frac{v}{\omega}\varphi$ e che $\frac{v}{\omega}$ è costante, si ha:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{v}{\omega}\varphi\right)^2 d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{\omega^2}\int_0^{2\pi}\varphi^2\,d\varphi=\frac{v^2}{2\,\omega^2}\cdot\left[\frac{\varphi^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{v^2}{2\,\omega^2}\cdot\frac{8\,\pi^3}{3}.$$

Ora, tenendo presente che il punto che genera la spirale si trova in A quando ha compiuto un giro completo, ossia nel tempo $T=2\pi/\omega$, risulta:

$$\overline{OA}=R=v\,T=v\cdot\frac{2\pi}{\omega} \quad \text{e perciò:} \quad v=\frac{R\omega}{2\pi}.$$

Cosicché:

$$S = \left(\frac{R\omega}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\omega^2} \cdot \frac{8\,\pi^3}{3} = \frac{1}{3}\,\pi\,R^2. \qquad [\text{c. v. d.}]$$

Per completare questo discorso sul calcolo delle aree di superfici a contorno mistilineo, di cui Archimede tratta nelle *Spirali*, riportiamo l'enunciato della proposizione 27 [2, pag. 382]:

«Delle aree comprese dalle spirali e dalle rette in rotazione, la terza è doppia della seconda, la quarta [è] tripla della seconda e la quinta è quadrupla [della seconda], e sempre la [area] seguente [è] multipla della seconda area secondo i successivi numeri [interi]: la prima area, poi, è la sesta parte della seconda».

Come già detto, nella proposizione 24 è dimostrato che l'area descritta dalla spirale nella prima rotazione è la terza parte dell'area del cerchio che avvolge la spirale stessa.

Tutto questo suscitò, secoli dopo, l'entusiasmo di un altro grande, Galileo Galilei (1564-1642), il quale si riferì all'opera del siracusano come *a le meravigliose Spirali d'Archimede*.

Nel nostro linguaggio simbolico, quanto espresso da Archimede nelle proposizioni 24 e 27, e che lo ribadiamo egli scoprì e dimostrò senza utilizzare alcun simbolismo, può essere sintetizzato così:

$$A_n = \begin{cases} 1/3\,\pi\,R^2 & \text{se} \quad n = 1 \\ (n-1)\cdot 2\,\pi\,R^2 & \text{se} \quad n > 1 \end{cases}$$

dove R è il passo della spirale, vale a dire la lunghezza del segmento OA (figura 10), che è anche il raggio del cerchio che avvolge la regione descritta dalla spirale nella sua prima rotazione, mentre A_n è l'area compresa tra la spirale e la semiretta in rotazione nella sua n-esima rotazione completa, a partire dalla seconda (n>1).

In figura 10 sono evidenziate le regioni descritte nelle prime tre rotazioni complete.

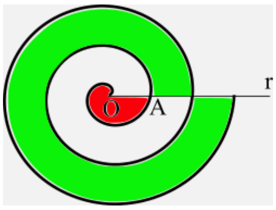

figura 10

La dimostrazione della precedente formula con i potenti mezzi dell'analisi matematica è semplice e immediata. Infatti, tralasciando il calcolo di A_1, di cui ci siamo già occupati, per il calcolo di A_n (n>1) basta sottrarre dall'area della regione descritta dalla semiretta ruotante nella sua n-esima rotazione – vale a dire per $\varphi \in [(n-1)\cdot 2\pi,\, n\cdot 2\pi]$ – quella descritta nella (n−1)-esima rotazione – vale a dire per $\varphi \in [(n-2)\cdot 2\pi,\, (n-1)\cdot 2\pi]$. Per cui, tenendo presente che $\rho = \frac{R}{2\pi}\varphi$, per n>1 e dopo alcuni semplici calcoli, si trova:

$$A_n = \frac{1}{2}\int_{(n-1)\cdot 2\pi}^{n\cdot 2\pi} \rho^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int_{(n-2)\cdot 2\pi}^{(n-1)\cdot 2\pi} \rho^2 d\varphi = (n-1)\cdot 2\,\pi\,R^2\,.$$

Il calcolo delle aree descritte nelle *Spirali* e quello delle aree di altre superfici piane e di volumi e aree di corpi solidi – esposti in altre opere quali *Quadratura della parabola*, *Sfera e cilindro*, *Conoidi e sferoidi* – fa ritenere giustamente Archimede come colui che anticipò di 2.000 anni la scoperta del calcolo integrale.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. M. F. AGUILAR, *Archimede*, Milano, RBA Italia, 2017.

[2] ARCHIMEDE, *Opere* (a cura di Attilio Frajese), Torino, UTET, 1974.

[3] C. B. BOYER, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1980.