

Si desidera determinare le ultime tre cifre del numero intero pari

$$A = 8^{25} + 12^{25} .$$

Scomponendo le basi dei due addendi del numero  $a$ , non è difficile mettere in evidenza alcuni fattori e scrivere

$$A = 4^{25}(2^{25} + 3^{25}) .$$

Inoltre, adoperando il Teorema binomiale

$$3^{25} = (5 - 2)^{25} = \sum_{k=0}^{25} (5^k A_k) \quad \text{con} \quad A_k = \binom{25}{k} (-2)^{25-k} ,$$

il numero in esame diventa

$$A = 4^{25} \left[ 2^{25} + \sum_{k=0}^{25} (5^k A_k) \right] = 4^{25} \left[ 2^{25} + \sum_{k=1}^{25} (5^k A_k) - 2^{25} \right] = 4^{25} \sum_{k=1}^{25} (5^k A_k) .$$

Si proverà ora che tutti i termini della precedente sommatoria risultano divisibili per 125. In effetti, questa affermazione è evidente per  $3 \leq k \leq 25$ , per cui conviene estrarre dalla sommatoria i primi due addendi

$$A = 4^{25} \left[ 5A_1 + 25A_2 + 125 \sum_{k=3}^{25} (5^{k-3} A_k) \right] .$$

Orbene, dato che è facile ottenere che

$$5A_1 + 25A_2 = 125 \cdot 2^{24} - 25 \cdot 25 \cdot 12 \cdot 2^{23} = 125 \cdot (2^{24} - 60 \cdot 2^{23}),$$

si può concludere che il numero  $a$  è costituito da due fattori, uno dei quali è il numero mille, di modo che si può scrivere

$$A = 1000 \cdot 4^{22} \left[ \sum_{k=3}^{25} (5^{k-3} A_k) - 58 \cdot 2^{23} \right]$$

e concludere che le sue ultime tre cifre sono 000.

Per completezza, si riporta lo sviluppo, costituito da 27 cifre decimali, del numero appena studiato

$$A = 953\,999\,945\,372\,553\,086\,763\,008\,000.$$