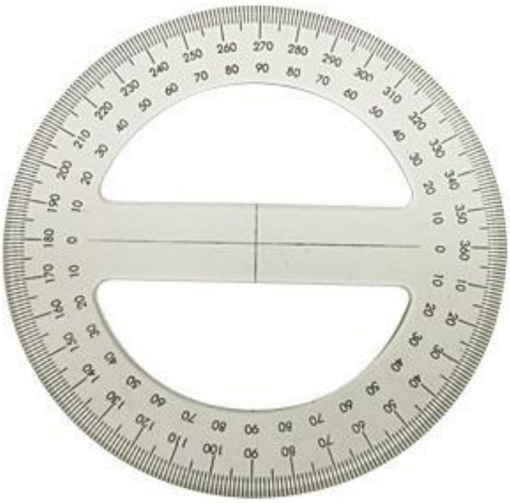
Supponendo di esprimere gli angoli in *gradi sessagesimali*, si determini il valore dell'esponente n che soddisfa l'equazione

$$(1+\tan 1°)(1+\tan 2°)\cdots(1+\tan 44°)(1+\tan 45°)=2^n\,.$$

Si comincia ad osservare che l'ultimo fattore è semplice da determinare, essendo

$$1+\tan 45°=1+1=2\,.$$



I 44 fattori rimanenti si possono raggruppare in 22 coppie, per cui l'equazione assegnata diventa

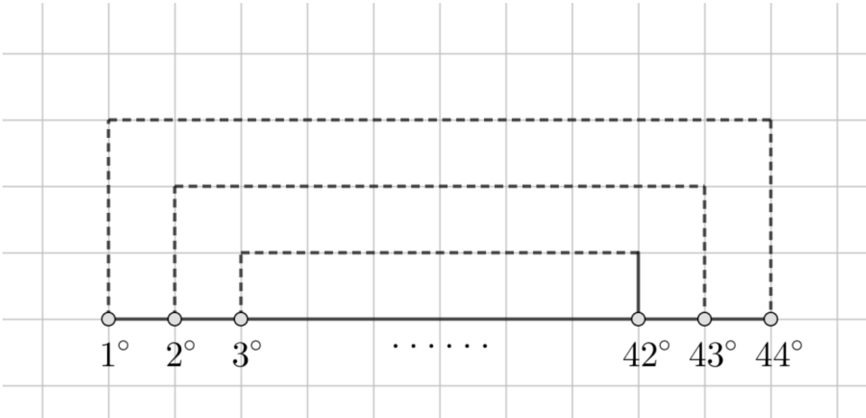
$$\prod_{k=1}^{22}(1+\tan k°)[1+\tan(45°-k°)]=2^{n-1}\,.$$

Orbene, dato che, in forza della formula di sottrazione della tangente, risulta

$$1+\tan(45°-k°)=1+\frac{\tan 45°-\tan k°}{1+\tan 45°\tan k°}=1+\frac{1-\tan k°}{1+\tan k°}=\frac{2}{1+\tan k°}\,,$$

non è difficile stabilire la relazione generale

$$(1 + \tan k°)[1 + \tan(45° - k°)] = 2\,.$$



Si può allora affermare che è piuttosto semplice determinare il valore che assume la produttoria: essendo ogni fattore pari a due, si può scrivere che

$$\prod_{k=1}^{22}(1 + \tan k°)[1 + \tan(45° - k°)] = 2^{22} = 2^{n-1}\,,$$

da cui discende la soluzione del problema proposto

$$n = 23\,.$$

Moltissime persone si trovano in difficoltà, quando si tratta di lavorare con minuti e secondi, cioè proprio con il sistema sessagesimale. La divisione in gradi e l'uso del sistema sessagesimale sono convenzioni introdotte dalle civiltà Sumerica e Babilonese nel terzo millennio avanti Cristo, quando si riteneva erroneamente che il Sole girasse attorno alla Terra in 360 giorni. Molti studiosi ritengono che la convenzione di introdurre il sistema sessagesimale fu usata per la facilità di creare sottomultipli delle misure: in effetti, è facile notare che il numero 60 è divisibile per numeri come 2, 3, 4, 5, 6. Ciò porta a creare molti sottomultipli che, proprio nel caso di unità di misura che usano il sistema sessagesimale per gli angoli e l'avanzare del tempo, risultano molto utili per esprimere queste grandezze. Un'ultima curiosità storica: oggi esistono molte più tracce della Matematica babilonese rispetto a quella egiziana, dato che le tavolette di argilla babilonesi venivano cotte al Sole oppure all'interno di forni, per cui si sono conservate meglio dei più deteriorabili e fragili papiri.