Si valuti l'integrale definito

$$I = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}\,dx\,.$$

L'integrando è costituito da una frazione avente il polinomio $N(x)$ di ottavo grado al numeratore e il polinomio $D(x)$ di secondo grado al denominatore

$$N(x) = x^4(1-x)^4\,, \qquad D(x) = x^2+1\,.$$

Sviluppando, in forza del Teorema binomiale il numeratore, si ottiene

$$N(x) = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4\,,$$

di modo che operando la divisione tra polinomi, risulta

$$\frac{N(x)}{D(x)} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{x^2+1}\,.$$

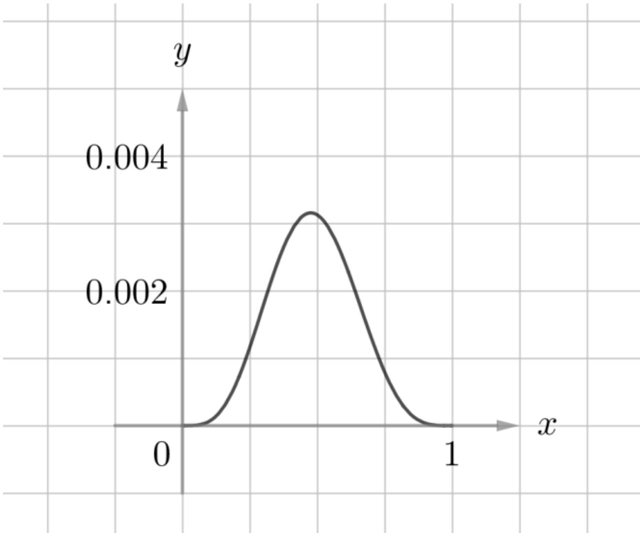
A questo punto, l'integrale risulta piuttosto semplice: dato che

$$\int \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}\,dx = \frac{x^7}{7} - \frac{2x^6}{3} + x^5 - \frac{4x^3}{3} + 4x - 4\tan^{-1}x + C\,,$$

essendo C una costante di integrazione, si deduce che

$$I = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - 4\pi = \frac{22}{7} - \pi \cong 0.0013\,.$$

Orbene, essendo l'integrando una funzione non negativa, si può affermare che l'area sottesa è un valore piuttosto piccolo.



Si noti quanto siano piccoli i valori assunti dalle ordinate riportate in figura.

⊙ Partendo dall'integrale appena calcolato, si dimostri che

$$\pi < \frac{22}{7}.$$

Dato che l'integrando trattato in precedenza è una funzione che non diventa mai negativa nell'intervallo di integrazione, si può concludere che esso deve essere positivo, per cui

$$I = \frac{22}{7} - \pi > 0 \quad \rightarrow \quad \pi < \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} = 3.\overline{142857}\,.$$

Il 14 marzo si celebra il giorno del *pi greco*, in quanto, nella sua scrittura anglosassone $3 - 14$, esso ricorda l'approssimazione più comune di π. Questo

numero, tuttavia, si celebra anche il 22 luglio, in quanto 22/7 è una famosa frazione, nota fin dai tempi di Archimede, che lo approssima.
Archimede, nel terzo secolo prima di Cristo, calcolò un valore approssimato di π utilizzando il perimetro di due poligoni regolari con 96 lati ciascuno ed arrivò alla conclusione che il numero cercato doveva essere compreso nell'intervallo

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

la miglior approssimazione mai vista fino ad allora. Il metodo di Archimede sarebbe rimasto in uso fino al 1600.