La Geometria algebrica e i triangoli eroniani

Nel N. 2 del Periodico di Matematiche del 1927, incontriamo un articolo di Giuseppina Biggiogero intitolato: “I triangoli Eroniani dal punto di vista della geometria algebrica”. Anche se, in generale, oggi siamo portati a prediligere gli algoritmi aritmetici, il metodo di Giuseppina Biggioggero ha un indubbio interesse storico e una sua valenza didattica; lo proponiamo, pertanto, aggiungendo alcuni commenti o chiarimenti.

Com’è noto, un triangolo si dice eroniano se le misure dei suoi lati e della sua area sono espresse da numeri interi. Il problema della ricerca delle terne eroniane era stato risolto da tempo ma lo scopo dell’articolo, come scrive la stessa autrice, è quello di trattare l’argomento da un punto di vista superiore “*..illuminandolo con semplici concetti di geometria algebrica*” e fare in modo che, “*…la ricerca delle formule risolutive per i triangoli Eroniani cessi di dipendere da più o meno eleganti artifici aritmetici.”*

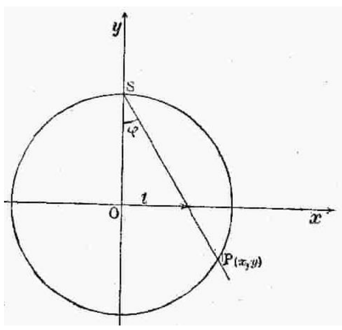
Non è difficile riconoscere, in questo atteggiamento, alcuni aspetti del pensiero metodologico di Federigo Enriques, assimilati dall’autrice durante la sua collaborazione con Oscar Chisini al Politecnico di Milano: attenzione alle questioni di matematica elementare da un punto di vista superiore, interesse per la geometria algebrica nei suoi aspetti formali non disgiunti dall’intuizione geometrica.

Ricordiamo che nel felice periodo dell’internazionalismo scientifico del primo ‘900 molti matematici italiani, tra cui lo stesso Enriques, si ispiravano al pensiero di Felix Klein, eletto Presidente della Commissione Internazionale sull'Istruzione Matematica durante il Congresso Internazionale di Matematica tenutosi a Roma nel 1908.

Non a caso, per quanto è stato osservato prima, il punto di partenza di G. Biggioggero in questa breve trattazione dei triangoli eroniani, è proprio il metodo di Klein per la ricerca delle terne pitagoriche, soluzioni dell’equazione diofantea $x^2 + y^2 = z^2$, essendo x, y e z le misure dei lati di un triangolo rettangolo.

Qualora si scelga l’ipotenusa come unità di misura delle lunghezze, il problema si traduce nella ricerca dei punti a coordinate razionali appartenenti alla circonferenza K di raggio unitario, con centro nell’origine di un riferimento cartesiano. Essendo la circonferenza una curva razionale, proiettandola da un suo punto S su una retta r in cui sia stato prefissato un sistema di ascisse t, ad ogni punto di r verrà a corrispondere algebricamente un sol punto di K, le cui coordinate possono essere espresse come funzioni razionali del parametro t.

Con riferimento alla figura seguente, la stessa del testo originale come quella successiva, la retta r è l’asse delle ascisse e il punto S ha coordinate (0;1).



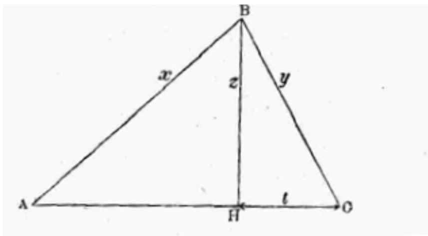
E’ facile verificare che , se essendo $t = \tan\varphi$, le coordinate del punto P, ovvero le equazioni parametriche della circonferenza K, sono:

$$\begin{cases} x = \sin 2\varphi \\ y = -\cos 2\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = -\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

Le equazioni del secondo gruppo permettono di trovare valori razionali di x e y assegnando valori razionali al parametro t. Con un opportuno cambiamento dell'unità di misura si perviene poi alle terne di numeri interi (x, y, z) soddisfacenti l'equazione: $x^2 + y^2 = z^2$.

Si vuole estendere il metodo di Klein alla ricerca delle misure dei lati di un triangolo eroniano.

Osserviamo che , se in un triangolo ABC le misure dei lati e dell'area sono espresse da numeri razionali, sarà razionale anche la misura di ciascuna delle tre altezze.
Con riferimento alla figura, supposto unitario il lato AC, si indicano con x,y,z le misure rispettive degli altri due lati AB e BC e dell'altezza BH.



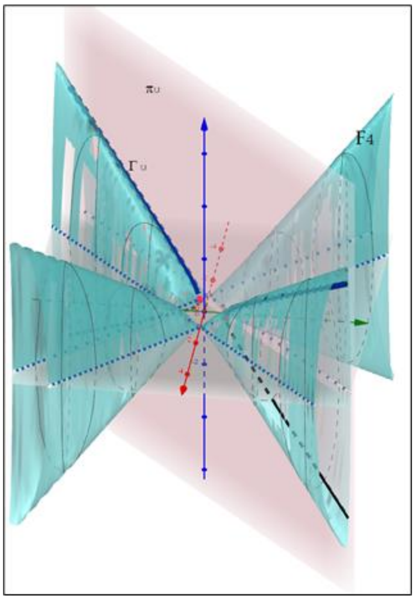
Indicata con t la misura del segmento HC, devono essere verificate le relazioni seguenti

$$x^2 - z^2 = (1-t)^2$$
$$y^2 - z^2 = t^2$$

L'equazione che si ottiene, eliminando il parametro t,

$$(1 + y^2 - x^2)^2 - 4(y^2 - z^2) = 0$$

rappresenta, in un riferimento cartesiano Oxyz, una superficie del quarto ordine, F_4, suscettibile di una rappresentazione piana, cioè una corrispondenza biunivoca tra i suoi punti e i punti del piano (u,v).



Le equazioni parametriche razionali

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v) \\ y = \varphi_2(u, v) \\ z = \varphi_3(u, v) \end{cases}$$

permetteranno di determinare valori razionali delle tre variabili assegnando valori razionali ai due parametri u e v.

Per verificare che F_4 è una superficie razionale, si osserva innanzitutto che appartiene al fascio individuato dal cilindro $1 + y^2 - x^2 = 0$, contato due volte, e dalla superficie degenere costituita dalla coppia di piani $y - z = 0$, $y + z = 0$ e dal piano improprio contato due volte.
Per maggiore chiarezza scriviamo le equazioni in coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4)

- Superficie F_4

$$(x_4{}^2 + x_2{}^2 - x_1{}^2)^2 - 4x_4{}^2(x_2{}^2 - x_3{}^2) = 0$$

- cilindro $x_4{}^2 + x_2{}^2 - x_1{}^2 = 0$
- coppia di piani $x_2 - x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$
- piano improprio $x_4 = 0$

Il cilindro ha due generatrici appartenenti al piano improprio, precisamente le rette

$$r\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \qquad s\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2 + x_1 = 0 \end{cases}$$

Queste risultano essere rette doppie per entrambe le superfici che generano il fascio e, pertanto, anche per la superficie F_4 , ottenuta come loro combinazione lineare.
Questo è sufficiente per affermare che F_4 è una superficie razionale e per determinarne una rappresentazione parametrica razionale.
Intersecando, infatti , la superficie con un generico piano passante , per esempio, per la retta r, si otterrà una curva del quarto ordine , spezzata necessariamente nella retta r contata due volte e in una conica.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + ux_4 = 0 \\ (x_4{}^2 + x_2{}^2 - x_1{}^2)^2 - 4x_4{}^2(x_2{}^2 - x_3{}^2) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} ux_4 = x_2 - x_1 \\ (x_4{}^2 + ux_2x_4 + ux_1x_4)^2 - 4x_4{}^2(x_2{}^2 - x_3{}^2) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} ux_4 = x_2 - x_1 \\ x_4{}^2[(x_4 + ux_2 + ux_1)^2 - 4(x_2{}^2 - x_3{}^2)] = 0 \end{cases}$$

Il sistema di quarto grado è equivalente ai due sistemi di secondo grado rappresentanti rispettivamente una coppia di rette coincidenti con la retta r e una conica.

Quest'ultima, ritornando alle coordinate non omogenee, è

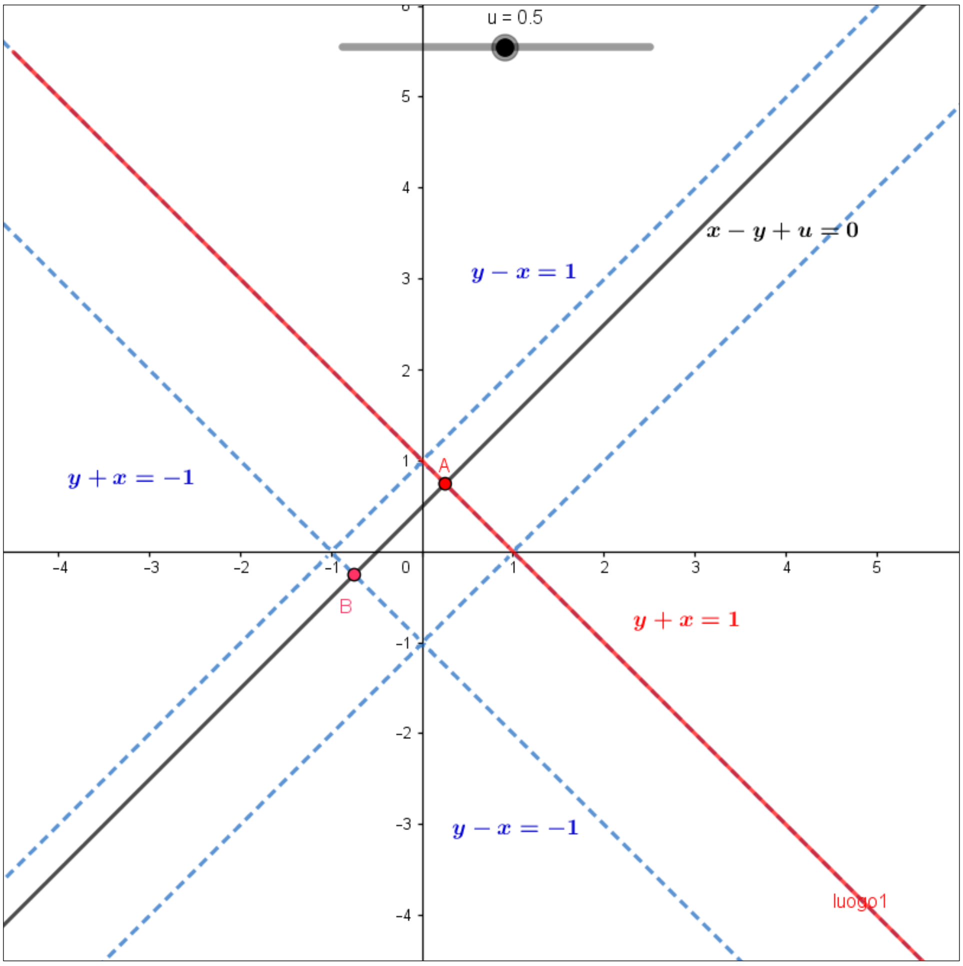
$$\Gamma_u\begin{cases} x - y + u = 0 \\ (1 + uy + ux)^2 - 4(y^2 - z^2) = 0 \end{cases}$$

Se proiettiamo l'intera figura sul piano $z = 0$, osserviamo che
la superficie F_4 ha come proiezione una quartica spezzata in 4 rette

$$a\begin{cases} z = 0 \\ y - x = 1 \end{cases} \quad \text{b}\begin{cases} z = 0 \\ y + x = 1 \end{cases} \quad \text{c}\begin{cases} z = 0 \\ y - x = -1 \end{cases} \quad d\begin{cases} z = 0 \\ y + x = -1 \end{cases}$$

il piano π_u ha per proiezione una retta $\begin{cases} z = 0 \\ x - y + u = 0 \end{cases}$

la conica Γ_u ha come proiezione i due punti $A\left(\frac{1-u}{2};\frac{1+u}{2};0\right)$ e $B\left(\frac{-1-u}{2};\frac{u-1}{2};0\right)$



Considerando, in particolare , il punto A, vediamo che, al variare di u, descrive la retta di equazione $b \quad y + x = 1$, la quale, pertanto, incontrerà in uno e un sol punto ciascuna delle Γ_u.

Fissato un valore di u, dal suo punto A possiamo proiettare la conica Γ_u su una retta, appartenente al suo stesso piano, su cui sia stato prefissato un sistema di ascisse v .
Al variare di u si ottiene la rappresentazione piana di F_4 in funzione dei due parametri u e v.

Conviene prendere, come retta delle v , la parallela all'asse z passante per il punto $K\left(\frac{3-u}{2};\frac{3+u}{2};0\right)$ e su di essa prendere come parametro v la z stessa;
il generico punto sarà P $\left(\frac{3-u}{2};\frac{3+u}{2};v\right)$ e la retta AP, proiettante la conica, sarà rappresentata dalle equazioni

$$\frac{x-\dfrac{1-u}{2}}{1}=\frac{y-\dfrac{1+u}{2}}{1}=\frac{z}{v}\rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1-u}{2}+\dfrac{z}{v}\\ y=\dfrac{1+u}{2}+\dfrac{z}{v}\end{cases}$$

Dopo opportuni calcoli, si trova che la retta AP incontra ulteriormente la superficie F_4 nel punto di coordinate

$$\begin{cases} x = & \dfrac{1-\ u^2}{u^2+v^2-1} + \dfrac{1-u}{2} \\ y = & \dfrac{1-\ u^2}{u^2+v^2-1} + \dfrac{1+u}{2} \\ z = & v\dfrac{1-\ u^2}{u^2+v^2-1} \end{cases}$$

Dal punto di vista geometrico è stata ottenuta una corrispondenza biunivoca tra i punti della superficie F_4 e i punti del piano (u, v).
Dal punto di vista analitico, per ogni coppia di valori razionali di u e v , escludendo i casi in cui le espressioni perdano di significato oppure corrispondano a valori nulli, le tre equazioni permettono di determinare una terna di numeri razionali che individuano un triangolo avente un lato unitario . Le variabili x e y rappresentano le misure degli altri due lati e z rappresenta la misura dell'altezza relativa al primo.
Con un opportuno cambiamento dell'unità di misura delle lunghezze si passerà a un triangolo eroniano in cui le misure dei lati e quella dell'area sono espresse da numeri interi.

Eventuali valori negativi delle variabili possono essere sostituiti dai valori opposti grazie alla simmetria di F_4 rispetto a ciascuno degli assi cartesiani.

Esempio
Per maggior chiarezza proponiamo un esempio di applicazione delle formule

Sia $u = \frac{1}{2} \qquad v = \frac{3}{4} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} x = & -\frac{15}{4} \\ y = & -\frac{13}{4} \\ z = & -3 \end{cases}$

A questi valori si fa corrispondere il triangolo eroniano i cui lati valgono $(4, 15, 13)$, rispettivamente, la misura dell'altezza relativa al primo lato è uguale 12 e l'area è uguale a 24 , in opportune unità di misura.

Viceversa, se, dati i valori di x, y e z, si vuole risalire ai parametri u e v, possiamo utilizzare la trasformazione inversa

$$\begin{cases} u = & y - x \\ v = & \dfrac{2z}{x+y-1} \end{cases}$$

Osservazioni
E' evidente nell'esposizione dell'autrice la fiducia nei metodi della Geometria algebrica, metodi che miravano a conciliare la potenza del calcolo con l'intuizione geometrica.

Purtroppo, abbiamo sperimentato come, in ambito didattico, prevalse alla fine la tendenza ai calcoli e ai formalismi, come osservava Bruno de Finetti nel noto articolo "Come liberare l'Italia dal morbo della trinomite"
(Periodico di matematiche -1965)
<... Qualche decennio fa era prevalente in Italia lo studio della Geometria algebrica («matrice prima di ogni problema matematico», come ho sentito dire, una volta, da SEVERI). La geometria algebrica generava però, a livello universitario, un sottoprodotto decisamente brutto: lo studio delle curve algebriche (parlo di quelle stereotipate come 'da concorso' che tuttora imperversano). E peggio ancora, a livello liceale, ne scendeva un sotto-prodotto costituito da quelle noiose e formali discussioni dei problemi di secondo grado (in cui il parametro adombrava la seconda variabile dell'equazione).
Resta sempre attuale l'invito a non trascurare l'aspetto geometrico dei problemi negli approcci risolutivi e soprattutto a evitare procedure e meccanismi standardizzati.