Riflessioni su una formula scoperta da Archimede

di Antonino Giambò

1. Archimede enuncia e dimostra, nell'opera *Spirali*, una formula che, a partire dal Rinascimento europeo e fino ai giorni nostri, è utilizzata nel calcolo di aree e volumi di particolari figure geometriche senza ricorrere al calcolo integrale. La formula, peraltro conosciuta da tutti, è la seguente:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2n+1)\,, \qquad [1]$$

dove n è un qualsiasi numero naturale non nullo.

Ad onor del vero, questa formula, benché in un caso particolare e in una forma leggermente diversa, compare in una tavoletta babilonese [1], ma siccome questa tavoletta sembra risalire all'epoca della dinastia seleucide (311-64 a.C.), non ci è dato sapere se prima o dopo Archimede (287 circa – 212 a.C.).

Nella tavoletta, per la precisione, è indicato il modo di calcolare la somma dei quadrati dei numeri da 1 a 10. Naturalmente i Babilonesi non usano simboli, ma esprimono a parole il procedimento da seguire. Lo riporto, con qualche licenza nella traduzione, soprattutto nell'indicazione dei numeri, che i Babilonesi scrivevano usando simboli cuneiformi in un sistema sessagesimale, mentre noi usiamo altri modi:

Quadrati da 1 volta 1 fino a 10 volte 10. Qual è il numero?
Tu moltiplicherai 1 per 1/3 e ottieni 1/3.
Tu moltiplicherai 10 per 2/3 e ottieni 20/3.
Tu fai la somma di 1/3 e 20/3 e ottieni 7.
Tu moltiplicherai 7 per 55 e ottieni 385.
Il numero è 385.

Nel nostro modo simbolico, il procedimento si sintetizza nella seguente formula:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\left(1\cdot\frac{1}{3}+10\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 55\,.$$

La quale, osservato che 55 è la somma dei primi 10 numeri naturali a partire da 1, è un caso particolare di quest'altra formula, dove n è un qualsiasi numero naturale non nullo:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\left(1\cdot\frac{1}{3}+n\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot(1+2+\cdots+n)\,. \qquad [1']$$

Questa formula, dato che la somma dei primi n numeri naturali non nulli è $\frac{n(n+1)}{2}$, è evidentemente un modo diverso di scrivere la [1].

In realtà non è dato sapere come abbiano fatto i Babilonesi a scoprire e a dimostrare questa formula, anche se ci sono diverse ipotesi al riguardo e inoltre non sappiamo se Archimede ne fosse a conoscenza.

Quello che invece è certo è che Archimede l'ha enunciata in forma generale, per n qualunque, e l'ha dimostrata, anche se per $n=8$, ma facendo capire chiaramente che la sua dimostrazione può essere generalizzata ad un n qualsiasi. Ed è per questo motivo che mi sento di affermare che **al grande scienziato siracusano deve essere attribuita la paternità della scoperta**. Naturalmente Archimede utilizza gli strumenti di cui dispone, vale a dire la geometria euclidea. E poi, per dirla tutta, egli non fornisce direttamente la formula ma enuncia un teorema ad essa equivalente. Inoltre, questo enunciato è esposto in forma totalmente retorica, non disponendo Archimede di alcun simbolismo.

Tale enunciato è il contenuto della proposizione 10 delle *Spirali*: il teorema non è fine a se stesso, ma è propedeutico alla dimostrazione di una certa proprietà della spirale di Archimede, guarda caso riguardante proprio il calcolo di un'area. Non mi occuperò di questo, avendone trattato in un precedente articolo pubblicato su questa stessa rubrica.

---

[1] Cfr.: LIVIA GIACARDI – SILVIA CLARA ROERO, *La matematica delle civiltà arcaiche*, Torino, Stampatori didattica, 1979, pagg. 132-133.

Mi propongo invece: a) di dimostrare per un n qualsiasi la proposizione 10 delle *Spirali* di Archimede, ma con il supporto dell'algebra; b) di far vedere che questa proposizione e la formula [1] sono modi diversi di esprimere lo stesso concetto.

Intanto, ecco l'enunciato della proposizione, nella traduzione di Attilio Frajese [2]:

«Se son date quante si vogliano linee, una dopo l'altra, tali che ciascuna di esse superi la seguente di una uguale quantità, e tali che l'eccesso [dell'una rispetto all'altra] sia uguale alla minore delle linee; e se son date altrettante linee ciascuna delle quali sia uguale in grandezza alla maggiore [delle linee prima date], i quadrati delle linee uguali alla maggiore, [sommati] con il quadrato della maggiore e [sommati] con il rettangolo della minore e [della somma] delle linee che si superano [l'una rispetto all'altra], saranno il triplo [della somma] di tutti i quadrati delle linee che si superano».

Intendo ripercorrere il ragionamento che segue Archimede per dimostrare questa proposizione.

Detto che le "linee" di cui si parla nell'enunciato sono in realtà segmenti, per prima cosa traduciamo in simboli quella proposizione.

Sono dati dunque *n* segmenti, dove *n* è un qualsiasi numero naturale non nullo, le cui misure:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_{n-1},\ a_n,$$

prese in ordine decrescente di grandezza, sono tali che ciascuna di esse supera la successiva di una misura pari alla minore (che ovviamente è a_n), vale a dire:

[2] $\quad a_1 = a_2 + a_n,\ \ a_2 = a_3 + a_n,\ \ a_3 = a_4 + a_n,\ \ \dots,\ \ a_{n-2} = a_{n-1} + a_n,\ \ a_{n-1} = a_n + a_n.$

Ebbene, la proposizione 10 si traduce nella seguente uguaglianza:

[3] $$\Big(\underbrace{{a_1}^2 + {a_1}^2 + {a_1}^2 + \cdots + {a_1}^2}_{n\ addendi}\Big) + {a_1}^2 + a_n \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n) =$$
$$= 3\,({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + \cdots + {a_{n-1}}^2 + {a_n}^2)\,.$$

È questa uguaglianza che si dimostra essere equivalente alla [1]. Ma lo vedremo più avanti.

2. Al momento andiamo a dimostrare la [3], ripercorrendo per l'appunto il ragionamento di Archimede ma, lo ripeto, con considerazioni di tipo algebrico.

Incominciamo riscrivendo questa relazione nella seguente forma più compatta:

[4] $$n\,{a_1}^2 + {a_1}^2 + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j = 3 \cdot \sum_{j=1}^{n} {a_j}^2\,.$$

Con il supporto – come fa Archimede – di una figura (figura 1), dove sono rappresentati gli n segmenti a_j assieme alle differenze k_j rispetto al segmento più lungo a_1, costatiamo che si hanno le seguenti uguaglianze per $j = 1, 2, , \dots, n$:

[5] $\quad a_j = a_{j-1} + a_n, \quad a_j = [n - (j-1)]\,a_n$

e queste altre per $j = 2, 3, \dots, n$:

[6] $\quad a_j + k_j = a_1, \quad k_j = a_{n-j+2}\,.$

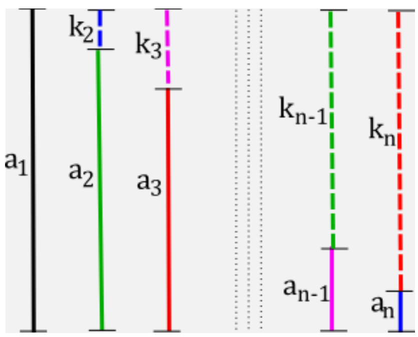

figura 1

Osserviamo adesso che si ha:

$$\sum_{j=1}^{n} {a_j}^2 = {a_1}^2 + \sum_{j=2}^{n} {a_j}^2 \quad \text{e} \quad \sum_{j=2}^{n} {k_j}^2 = \sum_{j=2}^{n} a_{n-j+2}^2 = \sum_{j=2}^{n} {a_j}^2\,;$$

per cui, in base a queste relazioni, risulta:

---

[2] Cfr.: ARCHIMEDE, *Opere* (a cura di Attilio Frajese), Torino, UTET, 1974, pag. 335 e segg.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j{}^2 + \sum_{j=2}^{n} k_j{}^2 + a_1{}^2 = \left(a_1{}^2 + \sum_{j=2}^{n} a_j{}^2 \right) + \left(\sum_{j=2}^{n} k_j{}^2 + a_1{}^2 \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j{}^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j{}^2,$$

e dunque:

[7] $$\sum_{j=1}^{n} a_j{}^2 + \sum_{j=2}^{n} k_j{}^2 + a_1{}^2 = \ 2 \sum_{j=1}^{n} a_j{}^2.$$

Si considerano, a questo punto, i due seguenti fatti, che Archimede registra puntualmente.

- Se al 1° membro della precedente uguaglianza [7] si somma la quantità:

$$\sum_{j=2}^{n} 2\ a_j\ a_{n+j-2} + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j\ ,$$

  tenendo presente che si ha:

$$\left(a_j + k_j\right)^2 = a_j{}^2 + k_j{}^2 + 2\ a_j\ k_j\ , \quad \text{e quindi:} \quad \sum_{j=2}^{n} \left(a_j + k_j\right)^2 = \sum_{j=2}^{n} a_j{}^2 + \sum_{j=2}^{n} k_j{}^2 + \sum_{j=2}^{n} 2\ a_j\ k_j\ ,$$

  e tenendo presenti inoltre entrambe le uguaglianze [6], si ottiene:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j{}^2 + \sum_{j=2}^{n} k_j{}^2 + a_1{}^2 + \sum_{j=2}^{n} 2\ a_j\ a_{n-j+2} + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j =$$

$$= a_1{}^2 + \left(\sum_{j=2}^{n} a_j{}^2 + \sum_{j=2}^{n} k_j{}^2 + \sum_{j=2}^{n} 2\ a_j\ k_j \right) + a_1{}^2 + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j =$$

$$= a_1{}^2 + \sum_{j=2}^{n} \left(a_j + k_j\right)^2 + a_1{}^2 + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j = \left(a_1{}^2 + \sum_{j=2}^{n} a_1{}^2 \right) + a_1{}^2 + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j =$$

$$= n\ a_1{}^2 + a_1{}^2 + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j\ .$$

  Cosicché il 1° membro della [7] diventa uguale al 1° membro dell'uguaglianza da dimostrare [4].

- A sua volta, com'è del tutto evidente, il 2° membro della medesima uguaglianza [7] diventa uguale al secondo membro dell'uguaglianza [4] se si somma ad esso la quantità:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j{}^2\ .$$

In seguito a questi due fatti, proseguendo col ragionamento di Archimede, l'uguaglianza [4] risulta dimostrata se si dimostra che vale l'uguaglianza delle due espressioni che sono state sommate ai due membri della medesima relazione [7], vale a dire se risulta:

[8] $$\sum_{j=2}^{n} 2\ a_j\ a_{n-j+2} + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j{}^2\ .$$

Ora, tenendo presente la seconda delle [5], si ha:

$$\sum_{j=2}^{n} 2\ a_j\ a_{n-j+2} + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=2}^{n} 2\ (n - j + 1)\ a_n\ a_{n-j+2} + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j =$$

$$= a_n \cdot \left\{ \sum_{j=2}^{n} 2\ (n - j + 1)\ a_{n-j+2} + \left(a_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j \right) \right\} = a_n \cdot a_1 + a_n \cdot \sum_{j=2}^{n} \left[(2n - 2j + 2)\ a_{n-j+2} + a_j \right] =$$

$$= a_n \cdot a_1 + a_n \cdot \{ [(2n - 2)\ a_n + a_2] + [(2n - 4)\ a_{n-1} + a_3] + [(2n - 6)\ a_{n-2} + a_4] + \cdots +$$

$$+ [4\ a_3 + a_{n-1}] + [2\ a_2 + a_n] \} =$$

$$= a_n \cdot a_1 + a_n \cdot \{3\, a_2 + 5\, a_3 + \cdots + (2n-3)\, a_{n-1} + (2n-1) a_n\} = a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} (2j-1)\, a_j\,.$$

Pertanto risulta:

$$\sum_{j=2}^{n} 2\, a_j\, a_{n-j+2} + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j = a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} (2j-1)\, a_j\,.$$

D'altro canto, siccome $a_n = a_1/n$, risulta: $a_n \cdot n a_1 = {a_1}^2$.
Inoltre, siccome $a_1 = a_j + a_{n-(j-2)}$ per $j = 2, 3, \ldots, n-1, n$, si ha:

$$n\, a_1 = a_1 + \sum_{j=2}^{n} a_1 = a_1 + \sum_{j=2}^{n} \left(a_j + a_{n-j+2}\right) =$$
$$= a_1 + (a_2 + a_n) + (a_3 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_3) + (a_n + a_2) =$$
$$= a_1 + 2\, a_2 + 2\, a_3 + \cdots + 2\, a_{n-1} + 2\, a_n = a_1 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_j.$$

Per cui, essendo ${a_1}^2 = a_n \cdot n a_1$, risulta:

$${a_1}^2 = a_n \cdot \left(a_1 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_j\right).$$

In modo analogo si ottiene:

$${a_2}^2 = a_n \cdot \left(a_2 + 2 \sum_{j=3}^{n} a_j\right), \quad {a_3}^2 = a_n \cdot \left(a_3 + 2 \sum_{j=4}^{n} a_j\right), \quad \ldots ,$$
$$a_{n-2}^2 = a_n \cdot \left(a_{n-2} + 2 \sum_{j=n-1}^{n} a_j\right), \quad a_{n-1}^2 = a_n \cdot \left(a_{n-1} + 2 \sum_{j=n}^{n} a_j\right).$$

Pertanto:

$$\sum_{j=1}^{n} {a_j}^2 = a_n \cdot \left\{\left(a_1 + 2 \sum_{j=2}^{n} a_j\right) + \left(a_2 + 2 \sum_{j=3}^{n} a_j\right) + \left(a_3 + 2 \sum_{j=4}^{n} a_j\right) + \cdots +\right.$$
$$\left. + \left(a_{n-2} + 2 \sum_{j=n-1}^{n} a_j\right) + \left(a_{n-1} + 2 \sum_{j=n}^{n} a_j\right) + a_n\right\} =$$
$$= a_n \cdot \{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) +$$
$$+2\, (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) +$$
$$+2\, (a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) +$$
$$+2\, (a_4 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+2\, (a_{n-1} + a_n) +$$
$$+2\, (a_n)\} =$$
$$= a_n \cdot \{a_1 + 3\, a_2 + 5\, a_3 + \cdots + (2n-3)\, a_{n-1} + (2n-1) a_n\} = a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} (2j-1)\, a_j\,.$$

È perciò vera l'uguaglianza [8] giacché i suoi due membri sono entrambi uguali all'espressione:

$$a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} (2j-1)\, a_j\,.$$

Di conseguenza, è dimostrata la [4] e quindi la [3].

3. Rimane da dimostrare che l'uguaglianza [3] è equivalente alla [1].

Poiché, come abbiamo già visto:

$$a_j = [n - (j-1)]\, a_n \quad \text{per} \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, n,$$

la [4], che è un modo equivalente di scrivere la [3], può essere scritta nel modo seguente:

$$n\,(n\,a_n)^2 + (n\,a_n)^2 + a_n \cdot \sum_{j=1}^{n} (n - j + 1)\, a_n \; = 3 \sum_{j=1}^{n} [(n - j + 1)\, a_n]^2,$$

ossia:

$$a_n{}^2 \cdot \left\{ n \cdot n^2 + n^2 + \sum_{j=1}^{n} (n - j + 1) \right\} = a_n{}^2 \cdot \left\{ 3 \sum_{j=1}^{n} [(n - j + 1)]^2 \right\}.$$

Questa formula, dopo aver diviso entrambi i membri per $a_n{}^2$ ed esplicitato le sommatorie, diventa:

$$n \cdot n^2 + n^2 + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n] = 3\,[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + \; n^2]\,.$$

Ora, tenendo presente che: $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)$, si calcola facilmente che è:

$$n \cdot n^2 + n^2 + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n] = n^2\,(n+1) + \frac{1}{2} n\,(n+1) = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)\,(2n+1)\,.$$

Di conseguenza vale la seguente uguaglianza:

$$3\,[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + \; n^2] = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)\,(2n+1),$$

dalla quale segue immediatamente la [1].

Cosicché effettivamente la formula [3], la quale traduce in simboli la proposizione 10 delle *Spirali* di Archimede, risulta trasformata nella [1].

Come dire, per l'appunto, che la proposizione 10 delle *Spirali* di Archimede è un modo equivalente, benché in forma retorica, di esprimere la formula [1]. Ciò che si voleva dimostrare.

4. La formula [1], oltre che nel modo descritto prima, può essere dimostrata con il supporto dell'algebra in almeno due modi diversi.

- Il primo di essi suggerisce di partire dall'identità notevole:

  $$(1 + k)^3 = 1 + 3\,k + 3\,k^2 + k^3\,,$$

  di assegnare a k gli n valori da 1 ad n e di ragionare quindi sulle n identità numeriche che ne scaturiscono, incominciando a sommarle membro a membro.
- Il secondo modo prevede il ricorso al principio d'induzione matematica.
  Si fa vedere precisamente che:
  - è vera la base dell'induzione: di fatto l'identità [1] è vera per n=1,
  - è vero il passo induttivo: di fatto, ammesso che l'identità [1] sia vera per n, si dimostra che è pure vera per $n + 1$, vale a dire che si ha:

    $$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \mathrm{n}^2) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}\,(\mathrm{n}+1)\,[(\mathrm{n}+1)+1][2(\mathrm{n}+1)+1]\,.$$

Ma queste cose sono note a tutti e pertanto non me ne occupo.

5. Quello che forse non tutti sanno è che la formula [1'], e dunque la [1], può essere dimostrata anche accompagnando l'algebra con il supporto di una figura geometrica in modi diversi da quello descritto da Archimede. Uno di questi modi è proposto da Otto Neugebauer (1899-1990), matematico austriaco, noto per le sue ricerche sulle civiltà antiche e in particolare su quella babilonese. Neugebauer lo indica come possibile procedimento dimostrativo seguito dai Babilonesi (3), quantunque per $n = 10$.

Lo vado a descrivere per n qualunque.

[3] Cfr.: GIACARDI-ROERO, op. cit., pagg. 133-134.

Si dispongono come in figura (figura 2) i pallini "pieni", la cui totalità è la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali non nulli, cioè:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (\mathrm{n}-1)^2 + \mathrm{n}^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 \,.$$

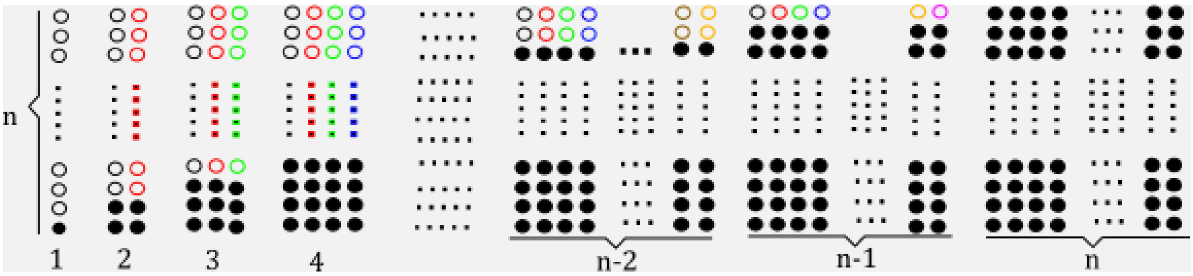

figura 2

Si completa la figura aggiungendovi dei pallini "vuoti", in modo da dare l'idea di un rettangolo di lati:

$$n \quad \text{e} \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \,.$$

La totalità dei pallini, pieni e vuoti, è pertanto:

$$n \cdot [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n] = n \cdot \sum_{j=1}^{n} j \,.$$

Si costata la cosa ovvia che la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali a partire da 1 – che vogliamo calcolare e che, come già detto, è data dalla totalità dei pallini pieni – si ottiene sottraendo la totalità dei pallini vuoti, che ancora non conosciamo, dalla somma di tutti i pallini, pieni e vuoti, che invece è nota.

Per ottenere dunque la formula cercata bisogna operare sui pallini vuoti. Al riguardo possiamo osservare quanto segue:

- la totalità dei pallini vuoti di colore **nero** (1ª colonna nei raggruppamenti da 1 a n-1) è:

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n-1)\,n}{2} \;;$$

- la totalità dei pallini vuoti di colore **rosso** (2ª colonna nei raggruppamenti da 2 a n-1) è:

$$(n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n-2)\,(n-1)}{2} \;;$$

- la totalità dei pallini vuoti di colore **verde** (3ª colonna nei raggruppamenti da 3 a n-1) è:

$$(n-3) + (n-4) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n-3)\,(n-2)}{2} \;;$$

- ……………… ;
- la totalità dei pallini vuoti di colore **arancione** ((n-2)-esima colonna nei raggruppamenti da n-2 a n-1) è:

$$[n-(n-2)] + [n-(n-1)] = \frac{[n-(n-2)]\,[n-(n-3)]}{2} = \frac{2 \times 3}{2} \;;$$

- la totalità dei pallini vuoti di colore **fucsia** (((n-1)-esima colonna nei raggruppamenti da n-1 a n-1) è:

$$[n-(n-1)] = \frac{[n-(n-1)]\,[n-(n-2)]}{2} = \frac{1 \times 2}{2} \,.$$

Cosicché la totalità dei pallini vuoti è:

$$\frac{(n-1)\,n}{2} + \frac{(n-2)\,(n-1)}{2} + \frac{(n-3)\,(n-2)}{2} + \cdots + \frac{2 \times 3}{2} + \frac{1 \times 2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j\,(j+1) \,.$$

Risulta pertanto:

[9] $$\sum_{j=1}^{n} j^2 = n \cdot \sum_{j=1}^{n} j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j\,(j+1).$$

D'altro canto si ha:

$$\sum_{j=1}^{n-1} j\,(j+1) = \sum_{j=1}^{n} j\,(j+1) - n\,(n+1) = \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} j - n\,(n+1) = \sum_{j=1}^{n} j^2 - \frac{1}{2}\,n\,(n+1)\,.$$

Di conseguenza:

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = n \cdot \sum_{j=1}^{n} j - \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} j^2 - \frac{1}{2}\,n\,(n+1)\right].$$

Da qui, dopo semplici elaborazioni, si ottiene:

$$3\sum_{j=1}^{n} j^2 = (1 + 2\,n) \cdot \sum_{j=1}^{n} j$$

e, in definitiva:

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{3} + n \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} j\,,$$

vale a dire la formula [1’] e quindi la [1]. Come volevasi dimostrare.

6. Le formule sono come le ciliegie: una tira l’altra. Mi spiego.

Poniamo l’attenzione sulla seguente formula, essa pure conosciuta:

$$[10] \qquad \sum_{j=1}^{n} j\,(j+1) = \frac{1}{3}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,.$$

Di solito se ne fornisce una dimostrazione utilizzando il principio d’induzione matematica.

In realtà, una volta dimostrata la [1], la [10] ne è una diretta conseguenza. Per provarlo riprendiamo la formula [9], che possiamo riscrivere nel seguente modo, che lega evidentemente le due espressioni $\sum_{j=1}^{n} j^2$ e $\sum_{j=1}^{n} j\,(j+1)$:

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = n \cdot \sum_{j=1}^{n} j - \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} j\,(j+1) - n\,(n+1)\right].$$

Da essa segue:

$$\sum_{j=1}^{n} j\,(j+1) = 2\,n \cdot \sum_{j=1}^{n} j + n\,(n+1) - 2\sum_{j=1}^{n} j^2\,.$$

Pertanto:

$$\sum_{j=1}^{n} j\,(j+1) = 2\,n\,\frac{n\,(n+1)}{2} + n\,(n+1) - 2 \cdot \frac{1}{6}\,n\,(n+1)(2n+1)\,.$$

Da cui si ottiene facilmente la [10].

7. Concludo con una considerazione a margine.

Le formule [1] e [10] si possono dimostrare utilizzando il principio d’induzione matematica. È un buon esercizio al fine di assimilare quel principio.

Purtroppo la formula (o la proprietà) che va dimostrata col principio d’induzione deve essere conosciuta preventivamente o quantomeno deve essere congetturata, ipotizzata. Questo, perché il principio non ha valore euristico ma solo dimostrativo.

Ora, in alcuni semplici casi, si può pervenire effettivamente ad una congettura della formula che poi può essere dimostrata col principio d’induzione. In altri casi questo non è affatto semplice. Non lo è, per esempio, per le formule [1] e [10].

Ebbene, di queste due formule, senza preoccuparsi di indovinarle con congetture più o meno plausibili, è possibile fornire dimostrazioni dirette, quantunque non semplicissime, senza coinvolgere il principio d’induzione. Ed è anche questo che ho voluto far vedere con questo contributo.