Geodetiche

di Antonino Giambò

1. L’argomento che vado a trattare, pur accessibile agli studenti delle scuole secondarie di 2° grado, non rientra fra i contenuti previsti dalle Indicazioni Nazionali (Licei) o dalle Linee Guida (Tecnici e Professionali). Può tuttavia interessare quegli studenti che fossero orientati a studi universitari in ambito matematico. E comunque l’argomento stesso si presenta come uno stimolante campo di applicazione della geometria elementare e può essere utile a tutti gli studenti, specialmente nella prima parte (paragrafi 2-3), in cui sono affrontati problemi di minimo in ambito geometrico.

Non bisogna poi credere che le geodetiche siano una fantasia dei matematici, estranea a qualsiasi situazione reale. Esse, infatti, si trovano in natura, come avremo modo di mostrare più avanti.

2. Entriamo in argomento.

Fissati due punti A e B su una superficie piana, si sa che il percorso più breve per andare da A a B, ammesso che sia possibile muoversi in ogni direzione, è la retta AB.

Ma se ci sono degli impedimenti oppure se devono essere rispettate determinate condizioni, qual è il minimo cammino? Come si trova?

Il primo problema del genere, di cui si abbia conoscenza, è noto come ***problema di Erone***, essendo stato formulato da Erone di Alessandria, vissuto in un’epoca imprecisata fra il I e il III sec. d.C., uno degli scienziati più prolifici che siano mai esistiti.

Il problema figura nell’opera denominata *Catottrica*, della quale ci è giunta una versione latina, e riguarda la riflessione della luce.

Precisamente Erone – partendo dal presupposto che un raggio luminoso debba compiere il percorso più breve per andare da una posizione A ad una posizione B dopo essersi riflettuto su uno specchio s – dimostra che questo percorso è quello per cui sono uguali l’angolo di incidenza i e quello di riflessione r (figura 1) .

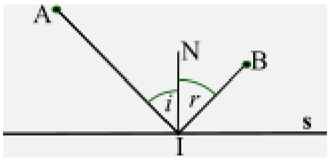

figura 1

Noi, oggigiorno, risolviamo rapidamente il problema utilizzando le proprietà della simmetria assiale. Una figura è sufficiente per rendersene conto.

In essa (figura 2) A’ è il punto simmetrico di A rispetto alla retta s ed I è l’intersezione delle rette A’B ed s. Si capisce facilmente che, per qualsiasi altra posizione di P diversa da I, risulta:

$$A'B = AI + IB < AP + PB.$$

Inoltre, condotta la perpendicolare IN alla retta s, si spiega agevolmente che sono uguali gli angoli $A\hat{I}N$ e $N\hat{I}B$.

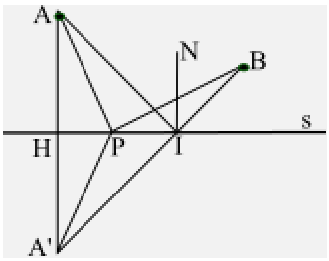

figura 2

Il problema è stato ripreso da Pierre de Fermat (giurista francese, matematico per hobby – 1601-1665) che, diversamente da Erone, lo affrontò partendo dal presupposto che sia minimo il tempo che la luce impiega per andare da una posizione ad un’altra.

Su questa base egli dimostrò non solo la legge della riflessione della luce, come aveva fatto Erone, ma anche quella della rifrazione, che Erone invece non aveva affrontato.

3. Dunque, Erone ragiona postulando un *percorso minimo* mentre Fermat lo fa assumendo l’ipotesi di un *tempo minimo*. Sono due concezioni diverse di un unico principio generale, che secoli prima il filosofo greco Aristotele (384-322 a.C.), aveva formulato nella sua *Metafisica* (libro V) e che recita così:

La natura sceglie sempre la via più facile.

Questo assioma, d'altro canto, fu assunto come principio basilare dei ragionamenti anche durante il Medioevo e, si può dire, codificato da un religioso francescano, l'inglese Guglielmo di Occam (1288-1347), tanto che sarebbe stato denominato *rasoio di Occam*. Questo principio è formulato con diverse espressioni lapidarie. Una di esse recita:

È inutile fare con più ciò che si può fare con meno.

Più tardi, due grandi lo avrebbero parafrasato in forme più o meno articolate: lo svizzero Jakob Bernoulli (1654-1705) e l'inglese Isaac Newton (1642-1727).

Questa la formulazione di Bernoulli:

La natura tende sempre ad agire nel modo più semplice.

Newton lo assunse addirittura come regola prima del "filosofare":

Delle cose naturali non devono essere ammesse cause più numerose di quelle che sono vere e bastano a spiegare i fenomeni.

4. A parte le situazioni descritte, riguardanti più la Filosofia naturale (cioè la Fisica) che la Matematica, altri casi possono essere descritti, più afferenti alla Geometria.

Qualche esempio.

- Se i punti A e B sono due punti qualsiasi di una superficie sferica e si debba andare dall'un punto all'altro muovendosi su questa superficie, il cammino più breve si realizza lungo il più piccolo degli archi di circonferenza massima passante per i due punti. Ogni altro tratto che unisce i due punti, effettuato sempre sulla superficie sferica, è più lungo di questo. Ricordo che una *circonferenza massima* è quella che si ottiene sezionando la superficie sferica con un piano passante per il suo centro.

- Se i punti A e B sono situati sulle facce di un diedro $\widehat{\alpha\beta}$ ma non sulla stessa faccia, il cammino più breve per andare da A a B, muovendosi sulle facce del diedro, è costituito dalla spezzata AOB, dove O è il punto dello spigolo s del diedro tale che $A\hat{O}R=B\hat{O}S$ (figura 3a): per rendersene conto è sufficiente distendere il diedro in modo che le sue facce diventino due semipiani opposti (figura 3b).

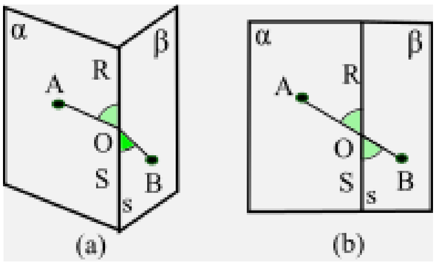

figura 3

- Se i due punti A e B sono i punti medi degli spigoli di un tetraedro regolare, ma non appartenenti alla stessa faccia (figura 4), basta considerare lo sviluppo del tetraedro e ci si rende conto che il cammino più breve è realizzato dal segmento di retta AB (figura 5). Un facile ragionamento porta poi a concludere che, in questo caso, il segmento AB è lungo quanto lo spigolo del tetraedro e di fatto il cammino più breve consiste nell'andare da A al punto medio dello spigolo comune alle due facce e da qui al punto B.

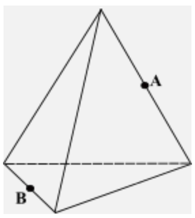

figura 4

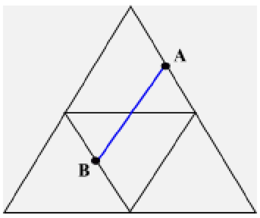

figura 5

Questi semplici esempi non dicono molto sull'argomento, che così appare invero piuttosto scialbo.

Esso diventa invece interessante quando la superficie su cui si trovano i due punti non è piana o sferica.

Dico subito, onde evitare incomprensioni, che non affronterò il problema dal sofisticato punto di vista del Calcolo delle Variazioni di Eulero/Lagrange, lasciando questo agli esperti del settore. Mi occuperò invece di cose molto terra terra, sperando però di non apparire banale. Lascerò da parte, pertanto, gli studi sul "perché" della sfericità delle bolle di sapone o quelli, congiunti ai pettegolezzi, sulla *brachistocrona*. Studi che videro impegnati menti eccelse come quelle dei fratelli Johann e Jakob Bernoulli, di Leibniz, di Newton. Mi limito a dire che il problema di ***tracciare la linea di minimo percorso fra due punti su una superficie***, che non sia necessariamente piana o sferica, fu posto da Johann Bernoulli (1667-1748). Queste linee furono poi chiamate ***geodetiche*** da Pierre Simon de Laplace (1749-1827) e studiate in maniera approfondita da Bernhard Riemann (1826-1866).

Lo studio delle geodetiche divenne importante nei primi anni del 20° secolo, per il ruolo fondamentale da esse ricoperto in relatività generale, in particolare nello studio dei moti in presenza di un campo gravitazionale.

Abbiamo, dunque, la seguente definizione:

GEODETICA è la linea che realizza il minimo percorso fra due punti assegnati su una data superficie.

In base a quanto visto prima possiamo allora concludere che, per esempio:

a) Le geodetiche di un piano sono rette. Precisamente, dati due punti del piano, è una geodetica la loro retta.

b) Le geodetiche di una superficie sferica sono circonferenze massime. Precisamente, dati due punti della superficie sferica, è una geodetica la circonferenza massima passante per essi.

c) Le geodetiche di un angolo diedro $\widehat{\alpha\beta}$ sono rette o spezzate. Precisamente:
- se i due punti appartengono alla stessa faccia, è una geodetica la retta passante per i due punti;
- se i due punti A e B non appartengono alla stessa faccia (figura 3a), è una geodetica la spezzate AOB, dove O è il punto dello spigolo RS del diedro tale che $A\hat{O}R = B\hat{O}S$,

E se la superficie è un cilindro o un cono, che linee sono le geodetiche? Ce ne occupiamo subito.

5. Incominciamo con le **geodetiche di un cilindro circolare retto**.

Se i due punti, fra i quali si vuole tracciare la geodetica, appartengono ad una generatrice, vale a dire un segmento di retta, la geodetica è evidentemente la generatrice medesima.

Se i due punti sono situati su una circonferenza contenuta in un piano perpendicolare all'asse di rotazione, la geodetica è la stessa circonferenza.

Più interessante è il caso in cui i due punti sono situati sulla superficie cilindrica in posizioni diverse dalle due esaminate sopra. Ebbene, in questo caso le geodetiche sono le cosiddette ***eliche cilindriche*** (chiamate anche ***eliche circolari***).

Per capire di cosa si tratti, seguiamo le seguenti considerazioni.

Consideriamo un punto P in moto uniforme su una circonferenza, ottenuta intersecando il cilindro con un piano perpendicolare al suo asse di rotazione. Supponiamo poi che contemporaneamente il piano della circonferenza subisca un moto traslatorio secondo la direzione dell'asse del cilindro.

Nel moto risultante dei due moti suddetti (uno rotatorio e uno traslatorio), il punto P descrive una linea giacente sulla superficie del cilindro: questa linea è per l'appunto una **elica cilindrica** (figura 6).

Un'elica cilindrica può essere *destrorsa* (detta anche *oraria* – figura 7a) o *sinistrorsa* (detta anche *antioraria* – figura 7b) a seconda del verso di rotazione.

Ogni generatrice del cilindro circolare è intersecata più volte da un'elica e la distanza fra due qualsiasi intersezioni consecutive si chiama *passo* dell'elica. Può essere costante o variabile.

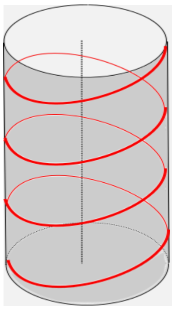
figura 6

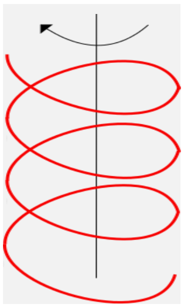
figura 7a

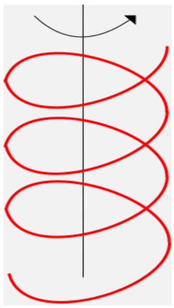
figura 7b

Fermiamo l'attenzione su **un'elica cilindrica a passo costante** (come quella di figura 6)**.**

Questo implica anzitutto che il moto traslatorio del piano contenente la circonferenza avviene con velocità costante.

Immaginiamo allora di sviluppare il cilindro su un piano: ogni spira dell'elica si distende secondo un segmento di retta e tutti i segmenti ottenuti sono uguali, paralleli ed equidistanti (figura 8).

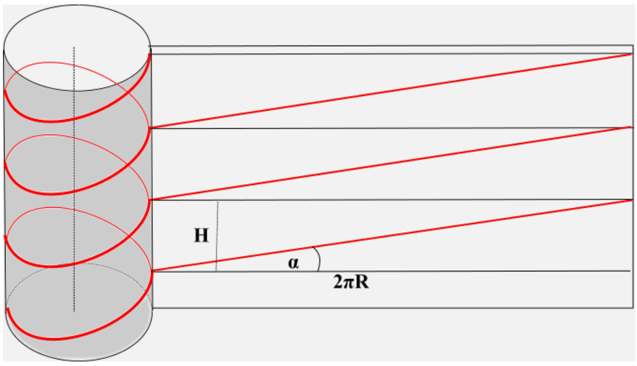

figura 8

Da ciò si comprende che l'elica cilindrica interseca ogni generatrice del cilindro secondo un angolo costante ed è inclinata di un angolo costante α (complementare del primo) rispetto ad ogni piano perpendicolare all'asse di rotazione: la tangente di quest'ultimo angolo si chiama *pendenza* (o *inclinazione*) dell'elica.

Se si indica con R il raggio dell'elica, che poi è anche il raggio del cilindro, e con H il suo passo (figura 8), la pendenza dell'elica, cioè tan α, è tale che si ha evidentemente: $\tan\alpha = \frac{H}{2\pi R}$.

In natura è possibile trovare corpi la cui struttura richiama l'elica cilindrica.

L'esempio più famoso è costituito dalla molecola di DNA (acido desossiribonucleico), che di solito presenta una struttura a doppia elica cilindrica, una destrorsa e una sinistrorsa (figura 9).

Anche le scale a chiocciola richiamano un'elica cilindrica (figura 10).

Così come le filettature dei bulloni e anche le molle progettate per la trazione.

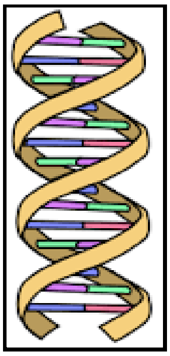
figura 9


figura 10

Completiamo questo discorso sull'elica cilindrica a passo costante determinando le sue equazioni.

Riferiamo al riguardo lo spazio ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), in cui l'origine O coincida con il centro della circonferenza sulla quale il punto P incomincia il suo moto, gli assi x ed y siano due diametri perpendicolari di questa circonferenza e l'asse z coincida con l'asse di rotazione del cilindro (figura 11).

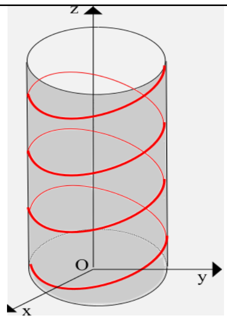

figura 11

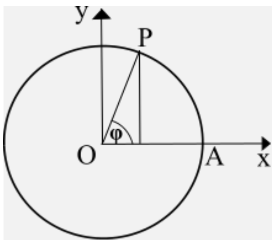

figura 12

Supponiamo che, nell'istante t=0 in cui inizia il moto intorno alla circonferenza di centro O contenuta nel piano xy (figura 12), il punto P occupi la posizione A(R, 0), dove R è il raggio del cilindro. Sia ω la sua velocità angolare. Se nel generico istante t il punto P occupa una posizione tale che $A\hat{O}P=\varphi$, risulta: $\varphi=\omega t$. Orbene, le coordinate (x, y) di P sono le seguenti:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \quad \text{ovvero:} \quad \begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases}$$

Se adesso consideriamo che il piano contenente la circonferenza si muove di moto uniforme secondo la direzione dell’asse z e indichiamo con v la velocità di traslazione, la quota di P nel riferimento (Oxyz) è $z=vt$.

Queste sono pertanto le **equazioni (parametriche) dell’elica circolare a passo costante**:

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \; . \\ z = v\, t \end{cases}$$

Il passo H dell’elica è il valore di z quando il punto P ha percorso un giro completo, ossia quanto $\varphi=2\pi$. In questo caso si ha $t=\dfrac{2\pi}{\omega}$ e perciò: $H = v\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}$. La pendenza dell’elica è $\tan\alpha=\dfrac{H}{2\pi R}=\dfrac{v}{\omega R}$.

6. Passiamo alle **geodetiche di un cono circolare retto**.

Si possono fare considerazioni analoghe a quelle fatte a proposito del cilindro.

Se i due punti, fra i quali si vuole tracciare la geodetica, appartengono ad una generatrice, la geodetica è la generatrice medesima.

Se i due punti sono situati su una circonferenza contenuta in un piano perpendicolare all’asse di rotazione, la geodetica è la stessa circonferenza.

Se i due punti sono situati sulla superficie conica in posizioni diverse dalle due esaminate sopra, le geodetiche sono ancora delle *eliche*, chiamate ***eliche coniche***.

Andiamo a spiegare come si ottiene un’elica conica.

In via preliminare è necessario descrivere una particolare curva piana, la “spirale di Archimede”.

Ebbene, supponiamo che un punto P si muova di moto uniforme su una semiretta di origine O, a partire da O, e contemporaneamente la semiretta ruoti intorno ad O di moto circolare uniforme. Come risultante dei due moti, il punto P descrive una curva piana denominata *spirale di Archimede* (figura 13).

Supponiamo adesso che, mentre il punto P descrive la spirale, il piano che la contiene sia sottoposto ad un moto traslatorio nella direzione dell’asse del cono.

Come risultante dei vari movimenti, il punto P descrive una curva, che si denomina ***elica conica***.

Qualora lo spazio percorso da P sia tale che in ogni istante il punto P sia situato sulla superficie laterale del cono, l’elica stessa risulta aderire a questa superficie (figura 14).

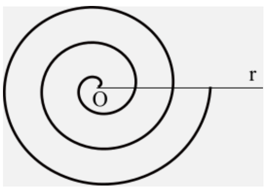

figura 13

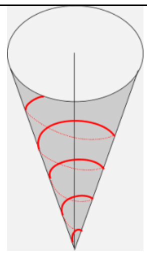
figura 14

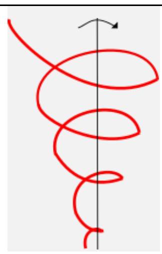
figura 15a

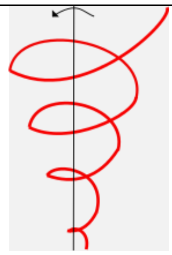
figura 15b

Anche un’elica conica può essere *destrorsa* (detta anche *oraria* – figura 15a) o *sinistrorsa* (detta anche *antioraria* – figura 15b) a seconda del verso di rotazione.

Ogni generatrice del cono circolare è intersecata più volte da un’elica e la distanza fra due qualsiasi intersezioni consecutive si chiama *passo* dell’elica. Può essere costante o variabile.

Anche dell’elica conica esistono in natura corpi che ne richiamano la struttura.

Un esempio di elica conica destrorsa a passo variabile è fornito da una conchiglia, denominata *Turrilites costatus* (figura 16), della quale si sono trovati dei fossili che risalgono al periodo del Cenomaniano, Cretaceo superiore, circa 95 milioni di anni fa.

Un altro esempio, sempre di elica conica destrorsa a passo variabile, è fornito da certe piante rampicanti come il viticcio a elica (figura 17).

La filettatura delle viti a forma conica è invece di norma un esempio di elica conica a passo costante.

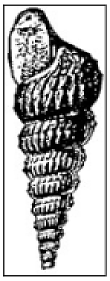

figura 16

figura 17

Fermiamo adesso l'attenzione su **un'elica conica a passo costante** (come quella di figura 14)**.**

Questo implica intanto che il moto traslatorio del piano contenente la spirale avviene con velocità costante.

Un'elica siffatta interseca le generatrici del cono alla cui superficie aderisce secondo angoli di ampiezza costante. Le spire hanno ovviamente lunghezze via via crescenti mentre il punto che genera l'elica si sposta dal vertice del cono verso la sua base.

Anche adesso completiamo il discorso sull'elica conica a passo costante determinando le sue equazioni.

Riferiamo al riguardo lo spazio ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz) in modo che l'origine O coincida con il vertice del cono, il semiasse positivo delle x coincida con la semiretta Or, l'asse y sia perpendicolare all'asse x e il piano della spirale di Archimede all'inizio del moto sia perpendicolare all'asse di rotazione del cono che si assume a sua volta come asse z (figura 18).

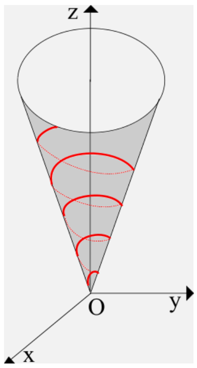

figura 18

Indichiamo con ρ lo spazio percorso dal punto P sulla semiretta Or (figura 13). Se è v la sua velocità costante e se nell'istante iniziale t=0, in cui ha inizio il moto, P si trova in O, si ha: $\rho=vt$. Sia φ l'angolo descritto dalla semiretta Or nella sua rotazione intorno ad O e sia ω la sua velocità angolare. Supposto che nell'istante t=0 la semiretta Or coincida con il semiasse positivo Ox, si ha: $\varphi=\omega t$. Ebbene, nel piano xy il punto P ha coordinate (x, y) tali che:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad \text{ovvero:} \qquad \begin{cases} x = v\,t\cos\omega t \\ y = v\,t\sin\omega t \end{cases}.$$

Se adesso consideriamo che il piano contenente la spirale di Archimede si muove di moto uniforme secondo la direzione dell'asse z e indichiamo con w la velocità di traslazione, la quota di P nel riferimento (Oxyz) è $z=wt$.

Queste sono pertanto le **equazioni (parametriche) dell'elica conica a passo costante**:

$$\begin{cases} x = v\,t\cos\omega t \\ y = v\,t\sin\omega t \\ z = w\,t \end{cases}.$$

Ragionando come nel caso dell'elica cilindrica, si trova che il passo dell'elica conica è $p=w\cdot\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Regole del filosofare. Regola I.

Delle cose naturali non devono essere ammesse cause più numerose di quelle che sono vere e bastano a spiegare i fenomeni.

Come dicono i filosofi: La natura non fa nulla invano, e inutilmente viene fatto con molte cose ciò che può essere fatto con poche. La natura, infatti, è semplice e non sovrabbonda in cause superflue delle cose.

[Tratto da: Isaac Newton, *Principi matematici della Filosofia naturale* (a cura di Alberto Pala), Torino, UTET, 1965, pag. 603]