Si determinino i valori del parametro a, in modo che l'equazione logaritmica

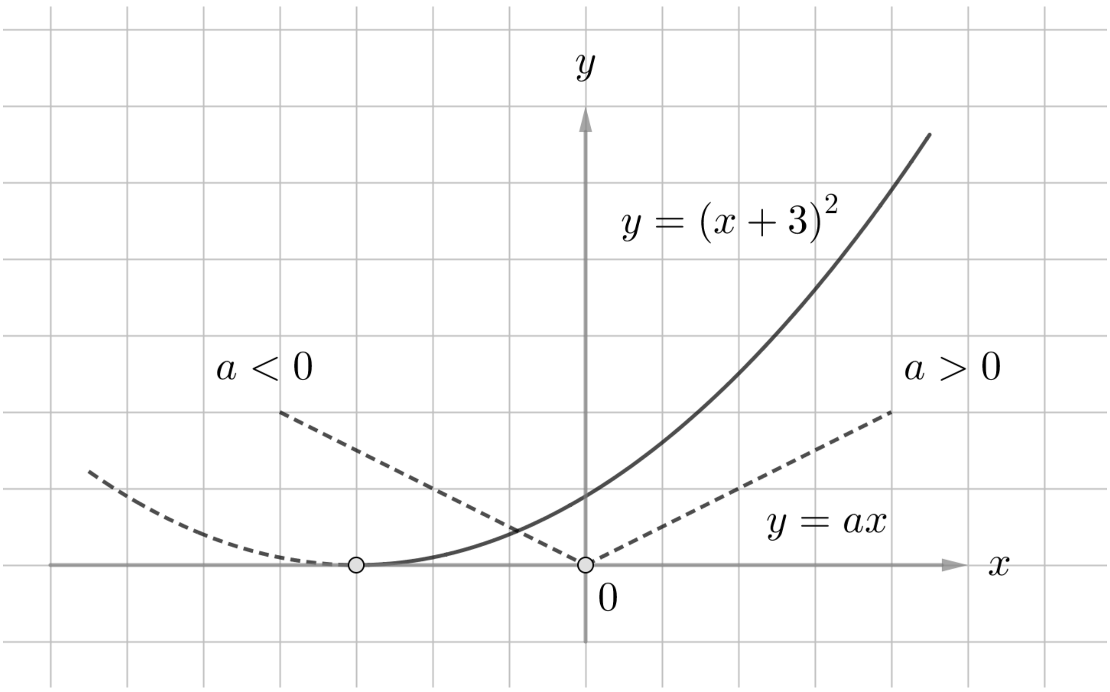
$$2\log(x+3) = \log(ax)$$

abbia una sola soluzione.

Dato che non importa il valore della base dei logaritmi, conviene scrivere l'equazione assegnata nella forma equivalente

$$(x+3)^2 = ax > 0\,,\ \ x > -3\,.$$

Il fatto che il prodotto ax sia positivo consiglia di separare l'insieme di definizione dell'equazione assegnata in due parti disgiunte. Si tratta, in ultima analisi, di studiare l'intersezione tra una parabola ed un fascio di rette, un esercizio che un tempo veniva svolto con il metodo del professore francese Arthur Louis Étienne Tartinville ($1847 - 1896$), a quanto pare eliminato dai programmi di studi liceali.



PRIMO CASO

Sia $a < 0$, per cui la radice di interesse deve necessariamente essere contenuta nell'intervallo

$$I = \{-3 < x < 0\}\,.$$

Orbene, quale che sia il valore assunto dal parametro a, si ottiene sempre una soluzione negativa, che vale

$$x = -3 + \frac{a + \sqrt{a^2 - 12a}}{2} \in I \quad \text{per} \quad a < 0\,.$$

L'altra radice dell'equazione di secondo grado è sicuramente più piccola di -3, per cui non viene presa in considerazione.

SECONDO CASO

Sia $a > 0$, per cui la radice di interesse deve necessariamente essere contenuta nell'intervallo

$$L = \{x > 0\}\,.$$

Si riconosce immediatamente che l'unico valore del parametro che fornisce una soluzione unica è

$$a = 12 \quad \rightarrow \quad x = 3\,.$$