Si indichi con α l'angolo che l'apotema del cono forma con l'altezza e si esprimano in funzione di a i vari elementi, cioè:

$$\text{altezza} \qquad h = \frac{b}{\operatorname{sen} a}$$

$$\text{raggio della base} \qquad r = \frac{b}{\cos a}$$

$$\text{apotema} \qquad g = \frac{b}{\operatorname{sen} a \cdot \cos a}.$$

Risulta allora che l'area laterale è

$$S = \pi \cdot g \cdot r = \pi a^2$$

cioè

$$g \cdot r = a^2$$

da cui, esprimendo g e r in funzione degli elementi noti e di a:

$$\frac{b^2}{\operatorname{sen} a \cdot \cos^2 a} = a^2$$

cioè

(1) $$b^2 = a^2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos^2 a.$$

Il volume V risulta

(2) $$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \frac{b^3}{\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1}{3}\pi \cdot b \cdot a^2$$

il che risponde alla prima domanda della questione.

Quanto alla seconda, si osservi che variando α fra 0 e 90°, dato che sia a, b^2 varia partendo dallo zero e ritornando allo zero, sicchè occorre trovare il massimo valore possibile di b^2, cioè il massimo valore del prodotto

$$\operatorname{sen} a \cdot \cos^2 a.$$

Posto $\operatorname{sen} a = x$, si ha la funzione

$$y = x(1 - x^2) = x - x^3$$

la cui derivata prima è $1 - 3x^2$, sicchè evidentemente la y ha un massimo per $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si deduce che il massimo valore di b^2 è dato da

$$b^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} a^2$$

e, conseguentemente deve essere

$$b \leq a\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

Questa risposta è dovuta al prof. F. ANTONINI; altre ci pervennero dalla laureanda C. TIBILETTI e dal prof. A. BARZAGHI.