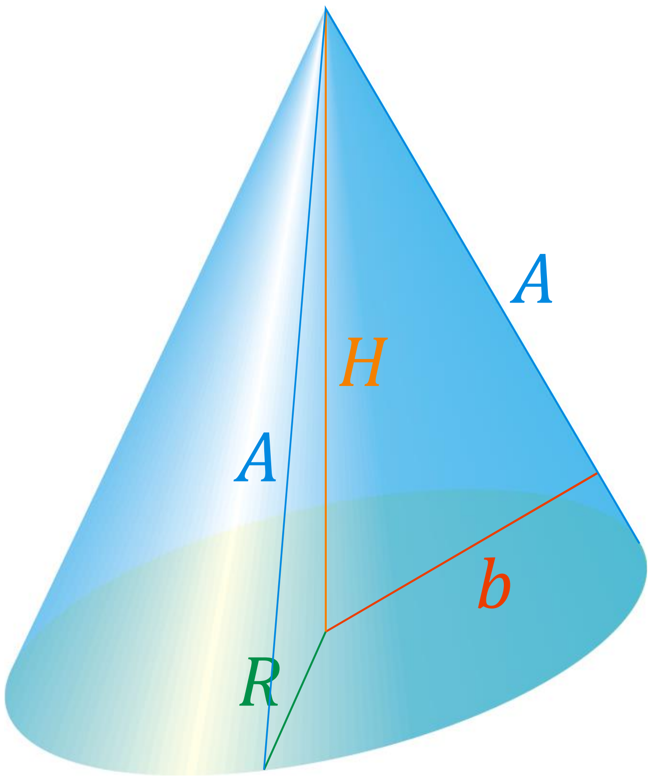
SOLUZIONE



Siano R, H e A, rispettivamente, il raggio di base, l'altezza e l'apotema del cono. Tenendo presente l'informazione data sulla superficie laterale, possiamo scrivere l'uguaglianza

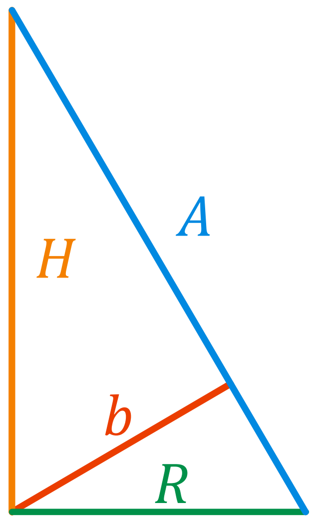
$$RA = a^2$$

Nello stesso tempo, la distanza b è l'altezza di un triangolo rettangolo che ha R e H come cateti e A come ipotenusa. Vale quindi il teorema di Pitagora per R, H e A e inoltre l'area di tale triangolo può quindi essere espressa in due modi diversi usando i segmenti già considerati

$$RH = bA$$

Abbiamo quindi un sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} RA = a^2 \\ RH = bA \\ A^2 = H^2 + R^2 \end{cases}$$



Moltiplicando membro a membro le prime due equazioni otteniamo

$$R^2H = a^2b$$

che permette di rispondere immediatamente alla prima domanda del problema, infatti

$$V_c = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi a^2 b$$

Per rispondere alla seconda domanda consideriamo nuovamente il sistema ed estraiamone una relazione tra a e b mediata da una sola delle grandezze geometriche del cono

$$\begin{cases} RA = a^2 \\ RH = bA \\ A^2 = H^2 + R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} RH = \dfrac{a^2 b}{R} \\ \dfrac{a^4}{R^2} = H^2 + R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H = \dfrac{a^2 b}{R^2} \\ a^4 = \dfrac{a^4 b^2}{R^2} + R^4 \end{cases} \Rightarrow b^2 = R^2 - \frac{R^6}{a^4}$$

All'aumentare di R la differenza tra R e A si riduce fino al caso limite in cui essi coincidono (in tal caso $A = a$ perché il cono degenera in due dischi sovrapposti). b è nullo sia per R nullo sia per $R =$

a, di conseguenza deve assumere valore massimo in corrispondenza di un valore intermedio, valore che può essere determinato cercando il massimo di $f(R) = R^2 - \frac{R^6}{a^4}$.

$$f'(R) = 2R - 6\frac{R^5}{a^4} \geq 0 \Rightarrow R \leq \frac{a}{\sqrt[4]{3}}$$

Nel risolvere la disequazione si è tenuto conto dei limiti di R in quanto lunghezza. b^2 non può quindi superare $f\left(\frac{a}{\sqrt[4]{3}}\right)$ affinché le misure date dal problema permettano di costruire una figura reale:

$$0 \leq b^2 \leq f\left(\frac{a}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{2a^2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow 0 \leq b \leq \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}a$$