Il tema della prova scritta (ambito 8, gennaio 2000)

Al candidato è chiesto di svolgere i quesiti di uno solo dei seguenti gruppi:

Gruppo 1

- Nel piano, sono dati: il cerchio γ di diametro AB, la retta t tangente ad esso in B, una retta r passante per A, i punti C, D intersezione di r rispettivamente con γ e t. Al variare di r, i punti P di essa per i quali è AP = CD (in valore e segno) descrivono la notissima cissoide di Diocle. Il candidato dopo averne esplicitato le equazioni – parametriche, cartesiana e polare – e calcolato le aree che essa delimita sia con il cerchio γ sia con l'asintoto si soffermi sull'utilizzo fattone da Diocle per duplicare il cubo. In ordine a tale ultima questione chiarisca il significato di problema classico dell'antichità e la visione più attuale di risolubilità di un problema.
- Insiemi infiniti e confronto tra essi. Il candidato illustri: i metodi diagonali di Cantor e l'ipotesi del continuo; la cardinalità dei numeri algebrici e dei numeri trascendenti. Fornisca esempi di numeri trascendenti.
- Il metodo di Newton per il calcolo delle radici di una equazione. Il candidato lo illustri e lo utilizzi per il calcolo della radice quadrata di un numero positivo a. Codifichi infine in un linguaggio di programmazione la procedura seguita.
- Il teorema di Talete: enunciato e dimostrazione. Si esponga una organizzazione didattica di contenuti ad esso collegabili

Gruppo 2

- La formula di Taylor: il candidato ne ponga in risalto l'utilità nelle applicazioni ed in particolare nel calcolo approssimato. Ne sottolinei l'importanza didattica attraverso la molteplicità dei risultati matematici che in essa si possono leggere. Si soffermi infine sulla solidarietà locale-globale da essa stabilita per i polinomi.
- Il candidato dopo aver dimostrato l'infinità dei numeri primi illustri il problema della loro distribuzione e del comportamento asintotico della funzione p(n) che dà il numero dei primi compresi tra 2 e n. Enunci infine qualcuno dei problemi ancora irrisolti sui numeri primi.
- L'equivalenza delle figure piane: il candidato esponga le linee essenziali di una organizzazione didattica dell'argomento. Dimostri la formula di Erone per l'area di un triangolo e precisi la validità della formula

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

per l'area di un quadrilatero (p è il semiperimetro e a,b,c e d le misure dei lati).

- Il candidato valuti la probabilità che in sei lanci due dadi diano la somma 9 almeno due volte.
  Con riferimento alle diverse definizioni di probabilità, dia un suo commento critico alla nota affermazione: «Probability does not exist (la probabilità non esiste)» dovuta a Bruno de Finetti.

Gruppo 3

- Una delle curve più famose è certamente la cicloide definita altresì l'«Hélène de la géométrie».
  Il candidato spieghi in che cosa essa consista; ne derivi (per la cicloide ordinaria) le equazioni e le misure delle grandezze più significative. Ne chiarisca infine le proprietà di tautocrona e di brachistocrona.
- Della formula

$$e^{i\pi}+1=0$$

  Il candidato esponga uno o più itinerari di dimostrazione motivandone didatticamente le assunzioni di partenza. Del numero π riporti sinteticamente i momenti salienti della sua storia e taluni dei metodi, elementari e non, per il suo calcolo.
- La sezione aurea di un segmento: definizione e sua costruzione geometrica; l'interesse storico ed artistico; il legame con la serie di Fibonacci. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si calcoli senx e cosx per x=18° e x=54°.
- Il candidato indichi una strategia numerica per l'approssimazione dell'integrale:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

  con una precisione fissata ed illustri la relazione che intercorre tra la funzione integranda e la funzione di distribuzione gaussiana (o distribuzione normale) di probabilità.