- ***La sezione è un pentagono***.

Si ottiene quando il piano sezione interseca cinque facce del cubo ma non la sesta (figura 16).

Anche adesso ci sono posizioni particolari del piano sezione, in cui sono intersecate tutte e sei le facce del cubo.

Considerato che due coppie delle facce intersecate sono parallele, consegue che il pentagono sezione deve avere due coppie di lati paralleli.

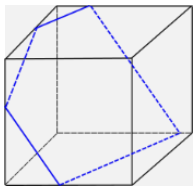

figura 16

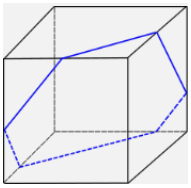

figura 17

- ***La sezione è un esagono***.

Se infine il piano interseca tutte e sei le facce del cubo si ottiene un esagono (figura 17).

Considerato che le facce del cubo sono due a due parallele, consegue che l'esagono sezione deve avere tre coppie di lati paralleli.

1. Fra le sezioni di un cubo con un piano rivestono particolare interesse le sezioni che si ottengono intersecando il cubo con un piano perpendicolare ad una sua diagonale. Ed è di questa speciale situazione che intendo trattare nelle prossime pagine, fino a calcolare come variano il perimetro e l'area della sezione mentre il piano sezione si sposta parallelamente a se stesso percorrendo l'intera diagonale.

Consideriamo il cubo ABCDEFGH (figura 18) e una sua diagonale, per esempio AG.
Conduciamo il piano α perpendicolare ad AG in un suo punto interno X. I casi in cui X coincide con gli estremi della diagonale sono banali dal momento che l'intersezione del piano con il cubo si riduce ad un punto.
Andiamo subito alle conclusioni, almeno alcune.

Indichiamo con K ed L le proiezioni ortogonali di B ed H rispettivamente su AG (figura 18).

Se X appartiene al segmento]AK] oppure al segmento [LG[, in altri termini se $0<AX\leq AK$ oppure $AL\leq AX<AG$, la sezione di α col cubo è un triangolo equilatero.

Se X appartiene al segmento]KL[, questa sezione è un esagono.

Questo esagono ha alcune interessanti proprietà: - i suoi angoli sono uguali e ciascuno di essi è ampio 120°; - i suoi lati sono due a due paralleli e, alternativamente, tre a tre uguali; - il suo perimetro non varia al variare di X sul segmento]KL[ed è esattamente $3s\sqrt{2}$, essendo s lo spigolo del cubo.

L'esagono diventa un esagono regolare nel caso particolare in cui il piano sezione passa per il centro del cubo. In questo caso l'esagono ha per vertici i punti medi di due spigoli di ogni faccia del cubo.

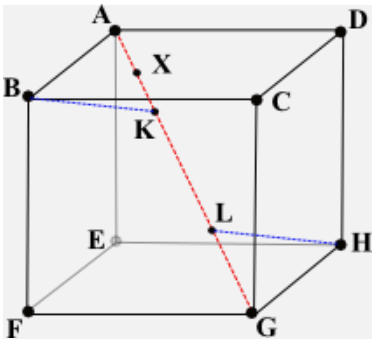

figura 18

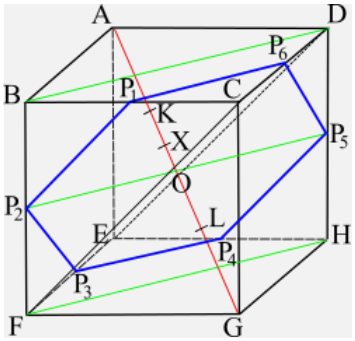

figura 19

Adesso la dimostrazione di queste conclusioni, con alcune integrazioni.

Con riferimento alla figura 19, indicata con K la proiezione ortogonale di B su AG, dimostriamo che se $X=K$ allora il piano α coincide col piano β' dei punti B, D, E.

Per questo osserviamo anzitutto che le proiezioni ortogonali di D ed E su AG coincidono con K: basta costatare che i triangoli AGB, AGD, AGE sono triangoli rettangoli congruenti di ipotenusa comune AG e che i cateti AB, AD, AE sono, ciascuno nel rispettivo triangolo, i cateti minori, per cui $AK<KG$.

Dunque le rette KB, KD, KE sono perpendicolari ad AG in K. Esse sono contenute perciò nel piano perpendicolare ad AG in K. Cosicché il piano α coincide, in questo caso, col piano β' dei punti B, D, E.

Analogamente si dimostra che se $X=L$ allora il piano α coincide col piano β'' dei punti F, H, C; risulta inoltre $AL>LG$ e $AK=LG$.

Adesso è semplice concludere che la sezione di α col cubo è il triangolo equilatero BDE quando $X=K$ ed il triangolo equilatero FHC quando $X=L$.

Altrettanto semplice è dimostrare che, se X è interno al segmento AK o al segmento LG, la sezione di α col cubo è ancora un triangolo equilatero.

Esaminiamo adesso il caso in cui X è interno al segmento KL, osservando anzitutto che il piano α non interseca i sei spigoli che concorrono negli estremi della diagonale AG, vale a dire gli spigoli AB, AD, AE, GH, GC, GF, ma interseca i sei spigoli rimanenti CD, BC, BF, EF, EH, HD. Per cui la sezione di α col cubo è un esagono, precisamente l'esagono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$.

In questo poligono i lati P_1P_2 , P_3P_4 , P_5P_6 sono congruenti fra loro, così come lo sono i lati P_2P_3 , P_4P_5 , P_6P_1.

Per dimostrarlo osserviamo anzitutto che ogni piano α è parallelo ai piani β' e β''. Cosicché le rette P_1P_2 e CF sono parallele perché intersezioni dei piani paralleli α e β'' col piano della faccia BCGF del cubo. Se ne desume facilmente che $BP_1 \cong BP_2$.

Analogamente si stabilisce che $CP_1 \cong CP_6$.

Di conseguenza $DP_6 \cong BP_1$ poiché si tratta di differenze di segmenti congruenti.

D'altronde anche $DP_6 \cong DP_5$. Dunque i due triangoli BP_1P_2 e DP_6P_5 sono congruenti. Perciò: $P_1P_2 \cong P_5P_6$.

Analogamente si ragiona negli altri casi.

Si può poi facilmente spiegare che:

$$P_1P_2 \parallel P_4P_5 \parallel P_3P_6\,, \qquad P_2P_3 \parallel P_5P_6 \parallel P_1P_4\,, \qquad P_3P_4 \parallel P_1P_6 \parallel P_2P_5\,.$$

Infine si può costatare che se $KX<XL$ risulta $BP_1<P_1C$ e se $KX>XL$ risulta $BP_1>P_1C$.

Pertanto, per ragioni di continuità, quando $KX=XL$, cioè quando X coincide col punto medio O della diagonale AG (vale a dire col centro del cubo), risulta $BP_1=P_1C$. Ne consegue che i vertici dell'esagono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ sono i punti medi degli spigoli, rispettivamente, BC, BF, EF, EH, DH, CD. Per cui i lati dell'esagono sono congruenti fra loro.

D'altra parte le diagonali P_1P_4 , P_2P_5 , P_3P_6 passano tutte per O. Infatti, per esempio con riferimento a P_1P_4 (ma il discorso per le altre due diagonali è analogo), basta osservare che essa congiunge i punti medi di due lati opposti del rettangolo BCHE e perciò passa per il centro di questo rettangolo, ossia per il punto medio della sua diagonale BH, che è poi anche la diagonale del cubo, il cui punto medio è proprio O.

Tutto questo, ricordando che $P_1P_2 \parallel P_3P_6$ e $P_2P_3 \parallel P_1P_4$, ci consente di concludere che il quadrilatero $OP_1P_2P_3$ è un parallelogramma. E siccome $P_1P_2 \cong P_2P_3$, esso è un rombo. Dunque $OP_1 \cong OP_2$.

In modo analogo si dimostra che sono congruenti fra loro tutti i segmenti OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, OP_5, OP_6. L'esagono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ si può inscrivere dunque in un cerchio di centro O. E siccome i suoi lati sono congruenti esso è chiaramente regolare.

Ritornando all'esagono generico, ottenuto come sezione del cubo col piano α quando X è interno al segmento KL, si può osservare che esso ha una configurazione particolare (figura 20). I suoi angoli interni sono congruenti fra loro e ciascuno è perciò ampio 120°.

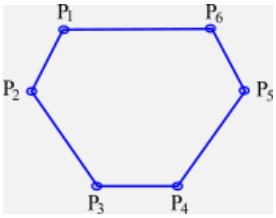

figura 20

È interessante studiare l'andamento del perimetro della sezione del piano α col cubo al variare del punto X da A a G lungo la diagonale AG. Per comodità supponiamo che lo spigolo del cubo sia lungo s, per cui $\overline{AG}=s\sqrt{3}$.

Calcoliamo anzitutto il perimetro del triangolo BDE e la lunghezza di AK. Per questo ridisegniamo per

comodità il tetraedro di vertice A e base BDE (figura 21), le cui facce laterali sono tre triangoli rettangoli uguali. Risulta chiaramente: $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{BE}=s\sqrt{2}$. Per cui il perimetro del triangolo BDE risulta essere: $P(BDE)=3s\sqrt{2}$.

Inoltre si ha: $\overline{BM} = \frac{\overline{BD}}{2}\sqrt{3} = \frac{s}{2}\sqrt{6}$ e $\overline{BK} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{s}{3}\sqrt{6}$. Dunque: $\overline{AK} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BK}^2} = \frac{s}{3}\sqrt{3}$.

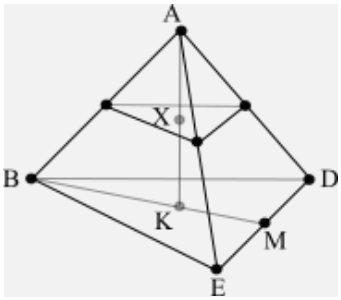

figura 21

Posto ora $\overline{AX}$=x e indicato con P(x) il perimetro del poligono sezione di α col cubo, mentre X varia da A a K, vale la seguente proporzione:

$$\frac{P(x)}{P(BDE)} = \frac{\overline{AX}}{\overline{AK}}.$$

Per cui, a conti fatti:

$$\text{per } 0 \le x \le \frac{s}{3}\sqrt{3} \quad \text{si ha:} \quad P(x) = 3\,x\,\sqrt{6}.$$

Ricordando adesso che AG ≅ LG, posto $\overline{XG} = x'$, per evidenti ragioni di simmetria, mentre X varia da L a G, il perimetro del poligono sezione è $P(x') = 3x'\sqrt{6}$. D'altra parte risulta $x' = s\sqrt{3} - x$ e ancora: $\overline{AL} = \frac{2}{3}s\sqrt{3}$. Pertanto, ritornando ad indicare con P(x) il perimetro della sezione, per X che varia da L a G, ossia:

$$\text{per } \frac{2}{3}s\sqrt{3} \le x \le s\sqrt{3} \quad \text{si ha:} \quad P(x) = 3\sqrt{6}\left(s\sqrt{3} - x\right).$$

Rimane da vedere cosa succede per X che varia da K ad L, cioè per $\frac{s}{3}\sqrt{3} < x < \frac{2}{3}s\sqrt{3}$.

Abbiamo già fatto notare come la sezione abbia la forma di figura 8, in cui i lati sono tre a tre congruenti. Si tratta allora di calcolare le misure di P_1P_2 e P_1P_6. Posto $\overline{BP_1} = z$, risulta $\overline{P_1P_2} = z\sqrt{2}$. Inoltre, essendo $\overline{P_1C} = s - z$, risulta $\overline{P_1P_6} = (s - z)\sqrt{2}$.

Ne consegue che:

$$\text{per } \frac{s}{3}\sqrt{3} < x < \frac{2}{3}\,s\sqrt{3} \quad \text{si ha:} \quad P(x) = 3\,z\sqrt{2} + 3\,(s - z)\sqrt{2} = 3\,s\sqrt{2}$$

cioè il perimetro **è invariante al variare del poligono sezione**. In sintesi:

$$P(x) = \begin{cases} 3\,x\sqrt{6} & \text{per } 0 \le x \le \frac{s}{3}\sqrt{3} \\ 3\,s\sqrt{2} & \text{per } \frac{s}{3}\sqrt{3} < x < \frac{2}{3}s\sqrt{3} \\ 3\sqrt{6}\left(s\sqrt{3} - x\right) & \text{per } \frac{2}{3}\,s\sqrt{3} \le x \le s\sqrt{3} \end{cases}$$

Un ragionamento simile può essere fatto per determinare l'andamento dell'area A(x) della sezione per $0 \le x \le s\sqrt{3}$, ossia per X che varia da A a G. Si trova:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\,x^2\sqrt{3} & \text{per } 0 \le x \le \frac{s}{3}\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3}\,x^2 + 9\,s\,x - \frac{3}{2}s^2\sqrt{3} & \text{per } \frac{s}{3}\sqrt{3} < x < \frac{2}{3}s\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\left(s\sqrt{3} - x\right)^2 & \text{per } \frac{2}{3}\,s\sqrt{3} \le x \le s\sqrt{3} \end{cases}$$

In particolare, il perimetro e l'area dell'esagono regolare, ottenuto quando il piano α passa per il centro del cubo, sono rispettivamente:

$$3\,s\sqrt{2}\,, \quad \frac{3}{4}\,s^2\sqrt{3}\,.$$

Nelle figure sottostanti sono riportati, per $s=\sqrt{3}$, i grafici del perimetro del poligono sezione (figura 22) e della sua area (figura 23) in funzione della distanza x di tale piano da uno degli estremi della diagonale considerata.

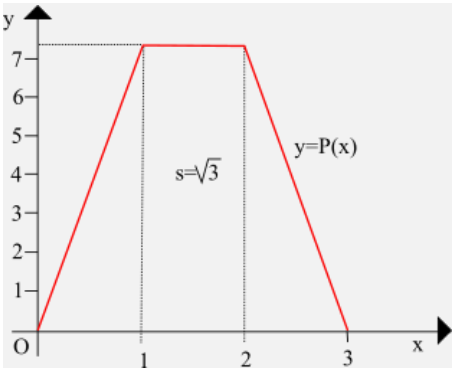

figura 22

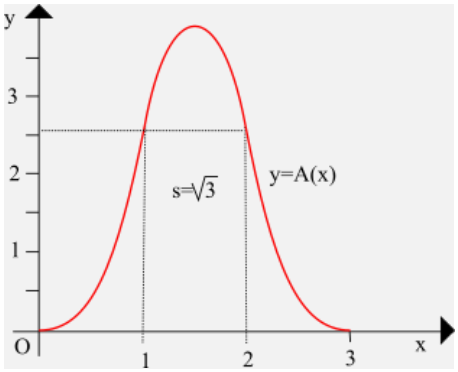

figura 23

Per valori diversi di s l'andamento delle due funzioni è simile a quello delle funzioni qui rappresentate.