4.11 Massimo trasferimento di potenza

Si consideri il circuito rappresentato in Figura 4.61, in cui un generatore reale di tensione è collegato al resistore R oppure, in maniera equivalente, R è collegato ad una rete qualsiasi, rappresentata da suo modello equivalente secondo Thévenin.

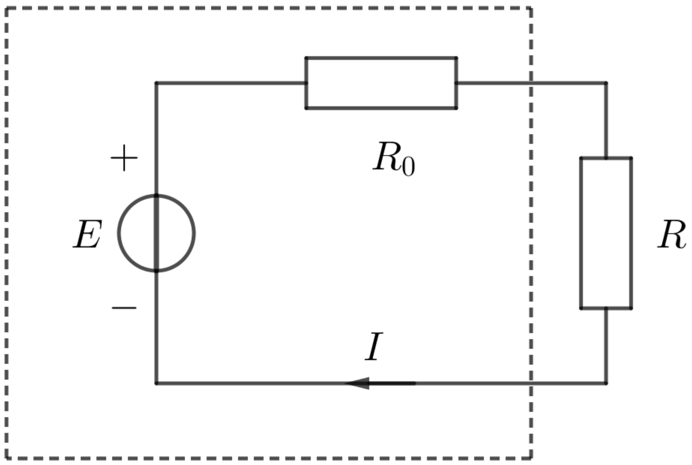

Figura 4.61: generico carico R connesso ad una sorgente.

La corrente che attraversa l'unica maglia vale

$$I = \frac{E}{R + R_0},$$

di modo che la potenza assorbita dal carico risulta pari a

$$P = RI^2 = E^2 \frac{R}{(R + R_0)^2} = \frac{E^2}{R_0} \frac{x}{(1 + x)^2} \quad \text{con} \quad x = \frac{R}{R_0}.$$

Questa potenza è dipendente dai diversi parametri che definiscono la rete ma, supponendo di poter variare solo R, cioè x, ha senso chiedersi per quale valore di x la funzione

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \quad \text{con} \quad x \geq 0$$

sia massima. È, dunque, necessario determinare la derivata

$$\frac{df}{dx} = \frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

e studiarne il segno

$$\frac{df}{dx} > 0 \quad \rightarrow \quad 1 - x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 \leq x < 1 \, .$$

Ci vuol dire che la potenza trasferita al carico cresce fino al valore $x = 1$, dopo di che comincia a decrescere, come illustra la Figura 4.62.

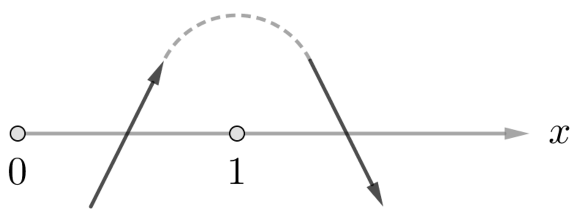

Figura 4.62: ricerca della potenza massima.

È evidente, a questo punto, che la potenza assorbita dal carico risulta massima quando $x = 1$, vale a dire quando $R = R_0$, ed in corrispondenza di questo valore essa è pari a

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_0} ,$$

come d'altronde si evince dal grafico riportato in Figura 4.63, da cui appare chiaro che la potenza raggiunge più o meno rapidamente il suo valore massimo, dal quale poi decresce lentamente, ma inesorabilmente, fino a tendere a zero.

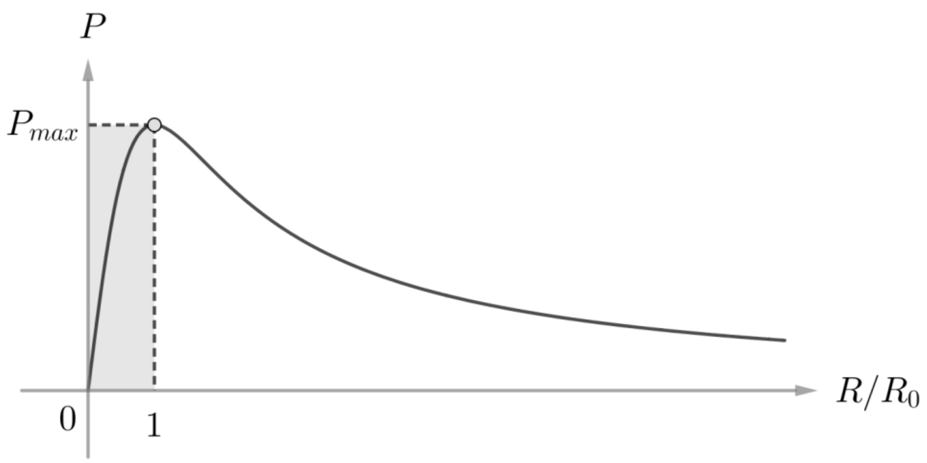

Figura 4.63: variazione con il carico R della potenza da esso assorbita.

Il generatore di tensione fornirà, ovviamente, la potenza ad entrambi i carichi, in modo che sia

$$P_E = R_0 I^2 + R I^2 = E I ,$$

quale che sia la condizione di funzionamento del circuito.

Vale la pena osservare che, per determinare il massimo relativo della funzione $f(x)$ che esprime la potenza in funzione della resistenza di carico

$$y = \frac{x}{(1+x)^2} \quad \text{con} \quad x \geq 0 ,$$

si può procedere anche per via algebrica, senza far uso delle derivate. In effetti, si può immediatamente affermare che essa è nulla nell'origine ed all'infinito e che assume valori mai negativi. Se si suppone che il valore della variabile $y > 0$ sia assegnato, essa si può scrivere come un'equazione quadratica rispetto all'altra variabile

$$x^2 + \left(2 - \frac{1}{y}\right)x + 1 = 0\,,$$

che presenterà, a seconda del valore del discriminante, due radici reali e distinte, due radici reali e coincidenti oppure complesse e coniugate. Più precisamente, posto che il discriminante vale

$$\Delta = \left(2 - \frac{1}{y}\right)^2 - 4 = \frac{1 - 4y}{y^2}\,,$$

si può schematicamente affermare che

- ✓ se $\Delta > 0$, vale a scrivere $y < 1/4$, allora saranno presenti due radici reali e distinte,
- ✓ se $\Delta > 0$, vale a scrivere $y = 1/4$, allora saranno presenti due radici reali e coincidenti,
- ✓ se $\Delta < 0$, vale a scrivere $y > 1/4$, allora non vi saranno intersezioni reali e le radici saranno complesse e coniugate.

Da quanto precede, si deduce che si è in presenza di un massimo relativo, quando si verifica che

$$y = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1\,,$$

da cui discende il risultato già ottenuto in precedenza.

Prende il nome di rendimento del circuito il rapporto tra la potenza assorbita da R e quella erogata dal generatore, dato da

$$\eta = \frac{P}{P_E} = \frac{RI^2}{EI} = \frac{RI}{E} = \frac{R}{R + R_0}\,.$$

Questo rendimento, in condizioni da massimo trasferimento di potenza, vale

$$R = R_0\,, \;\; P = \frac{E^2}{4R_0} \quad \rightarrow \quad \eta_{max} = \frac{1}{2}\,.$$

Ciò vuol dire che, nelle migliori condizioni di trasferimento di potenza, soltanto il 50% della potenza erogata dal generatore viene assorbita dal carico.
Si avrà modo di ritornare nel seguito su queste considerazioni, dato che un teorema simile sussiste anche in regime sinusoidale.