UN ESEMPIO

Confronto tra il metodo grafico e il metodo di Tartinville.

Proviamo a risolvere e a discutere il problema che ha suggerito i due sistemi a) e b) analizzati precedentemente. Si tratta dell'adattamento del punto 2 del Problema1 assegnato nel 2013 al liceo della Comunicazione .

L'esempio mostra come anche il metodo grafico possa basarsi su operazioni standardizzate mentre la discussione col metodo algebrico può risultare concettualmente più impegnativa

PROBLEMA

I due cerchi Σ e Δ, in figura 1, hanno uguale raggio r. Le rispettive circonferenze si incontrano nei punti A e B e ciascuna passa per il centro dell'altra (punti C e D) . Con Γ è denotata la loro parte comune.

Inscrivere nella regione Γ un rettangolo aventi i lati paralleli alla retta CD e alla retta AB, in modo che il suo perimetro sia uguale a $k\,r$. Discussione e costruzione del rettangolo di perimetro massimo.

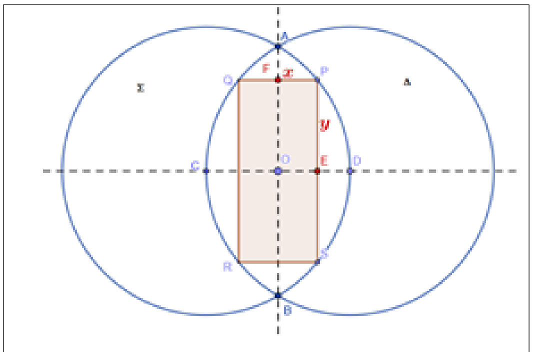


Fig.1

N.B. Assumere uguale a 4 la misura del raggio.

Soluzione, con riferimento alla figura 1

Impostazione

I triangoli ACD e BCD sono equilateri e il loro lato ha misura uguale al raggio, pertanto

$\overline{AO} = \overline{BO} = 2\sqrt{3}.$

Scelto un punto P sul minore degli archi AD della circonferenza di centro C, si costruisce il rettangolo PQRS essendo Q, R, S i simmetrici di P rispetto alla retta AB, al punto O e alla retta CD, rispettivamente.

Il rettangolo è degenere se P coincide con D ($2p = 8$) o con A ($2p = 8\sqrt{3}.$)

Se x e y sono le distanze di P dalla retta AB e dalla retta CD, rispettivamente, il perimetro del rettangolo è $F(x,y) = 4x + 4y = kr = 4k \rightarrow$

$x + y = k$ con $0 < x < 2$ $0 < y < 2\sqrt{3}$

Tra le due variabili sussiste anche la relazione $x^2 + y^2 + 4x = 12$ ottenuta applicando il teorema di Pitagora al triangolo CPE : $(x+2)^2 + y^2 = 16$

Si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x=12 \\ x+y=k \\ 0<x<2 \quad ; \quad 0<y<2\sqrt{3} \end{cases} \qquad \text{con } k>0$$

Discussione

Metodo grafico (Figura2) : in un riferimento cartesiano avente l'asse x coincidente con la retta CD e l'asse y coincidente con la retta AB , abbiamo una circonferenza fissa e un fascio improprio di rette. I punti comuni devono appartenere all'arco AD.

Si consideri il fascio di rette di equazione $x+y=k$ e tra queste :

- la retta r che passa per il punto D → **k=2**
- la retta s che passa per il punto A → **k=$2\sqrt{3}$**
- la retta t tangente all'arco AD in T→ $\mathbf{k=4\sqrt{2}-2}$
  Le rette del fascio che incontrano l'arco AD appartengono alla striscia individuate dalle rette **r** e **t** e corrispondono ai valori $\mathbf{2 \le \mathit{k} \le 4\sqrt{2}-2}$

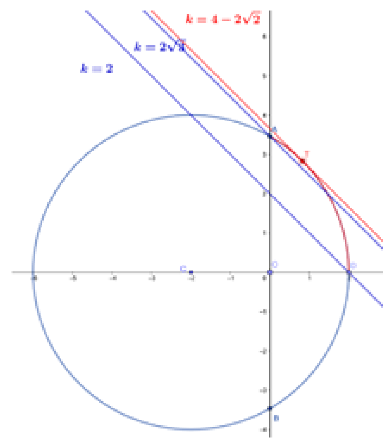


Fig 2

In particolare

$2<k<2\sqrt{3}$ una soluzione ordinaria

$k=2\sqrt{3}$ una soluzione limite e una ordinaria

$2\sqrt{3}<k<4\sqrt{2}-2$ due soluzioni ordinarie

$k=4\sqrt{2}-2$ due soluzioni coincidenti corrispondenti alle coordinate del punto T di tangenza

Metodo algebrico

Eliminazione di un'incognita $\begin{cases} 2x^2+(4-2k)x+k^2-12=0 \\ y=k-x \\ 0<x<k \end{cases}$

Osservazione:

per la variabile y è stato eliminato il limite geometrico $y<2\sqrt{3}$

per la variabile x è stato eliminato il limite geometrico $x<2$ ed è stato sostituito con il limite algebrico $x<k$, che assicura la positività della y.

Giustificazione:

la relazione pitagorica $(x+2)^2 + y^2 = 16$ assicura che se le due variabili sono entrambe reali e positive, necessariamente rispettano i due limiti geometrici:

se x è reale positivo, necessariamente risulta

$y^2 = 12 - x(x+4) - 4x < 12$ da cui $-2\sqrt{3} < y < 2\sqrt{3} \to 0 < y < 2\sqrt{3}$

se y è $reale,$ necessariamente risulta

$(x+2)^2 = 16 - y^2 < 16$ da cui $-2 < x < 2 \to 0 < x < 2$

La discussione di Tartinville

La realtà delle radici di un'equazione di secondo grado dipende dal segno del discriminante Δ.

Lo studio del segno del trinomio di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ *avente due zeri reali e distinti,* x_1 *e* x_2 *, permette di affermare che*

- *se* $f(\alpha)$ *ha segno discorde con* a *allora il numero reale* α *cade nell'intervallo interno a* $[x_1; x_2]$
- *se* $f(\alpha)$ *ha lo stesso segno di* a *, allora* α *cade in uno dei due intervalli esterni a* $[x_1; x_2]$*;*

  precisamente , indicato con $\sum = \frac{x_1+x_2}{2}$ *il valore della semisomma dei due zeri,* α *cade nell'intervallo sinistro o nell'intervallo destro a seconda che sia* $\alpha < \sum$ *o* $\alpha > \sum$

  Studio del segno di Δ, $a, f(0), f(k), \sum - 0, \sum - k$ (si tiene conto della condizione k>0)

a) $\Delta = 4(28 - 4k - k^2) \geq 0$ è per $0 < k \leq 4\sqrt{2} - 2$
b) Il primo coefficiente è indipendente da k e positivo
c) Confronto delle radici con i due limiti

$$f(0) = k^2 - 12 \geq 0 \; per \;\; k \geq 2\sqrt{3}$$

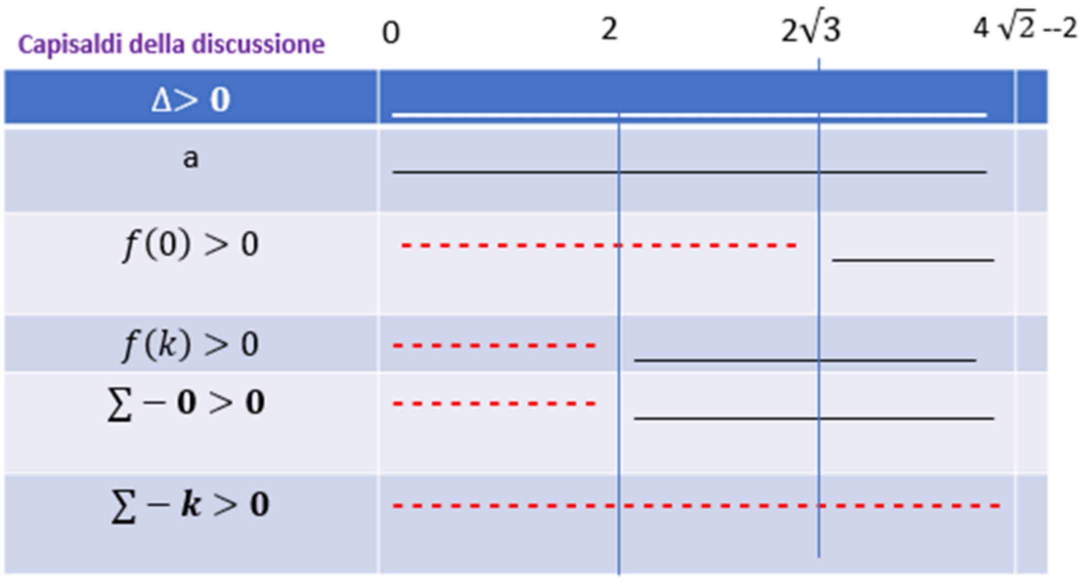
$$f(k) = k^2 + 4k - 12 \geq 0 \text{ per } k \geq 2$$

a) confronto della semisomma delle radici , $\sum = \frac{k-2}{2}$, con i due limiti

$$\frac{k-2}{2} - 0 > 0 \;\; per \; k > 2$$

$$\frac{k-2}{2} - k = \frac{-k-2}{2} < 0 \quad \forall\, k > 0$$

Lo schema di Tartinville



Conclusioni

$0 < k < 2$ nessuna soluzione x_1________0________k____x_2

$k = 2$ una soluzione limite x_1________0____________$x_2 \equiv k$

$2 < k < 2\sqrt{3}$ una soluzione ordinaria x_1 ________0__________x_2___k

$k = 2\sqrt{3}$ una soluzione limite e una ordinaria $x_1 \equiv 0$____________x_2__k

$2\sqrt{3} < k < 4\sqrt{2} - 2$ due soluzioni ordinarie 0________x_1________Σ____x_2_____k

$k = 4\sqrt{2} - 2$ due soluzioni coincidenti 0________$x_1 \equiv x_2 \equiv \Sigma$_________$k$

Ottimizzazione

La funzione da ottimizzare può essere sostituita da

$g(x;y) = \frac{1}{4}\mathrm{F}(x;y) = x + y = k$

I vincoli sono rappresentati dal sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 12 \\ 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2\sqrt{3} \end{cases}$

Casi limite $x = 0 \quad y = 2\sqrt{3} \quad \rightarrow \mathit{rettangolo\ degenere\ di\ perimetro}\ 8\sqrt{3}$
$x = 2 \quad y = 0 \quad \rightarrow \mathit{rettangolo\ degenere\ di\ perimetro}\ 8$

Il perimetro massimo si ottiene in corrispondenza del massimo valore che può assumere il parametro k

$$\boldsymbol{perimetro\ \ massimo} = \mathbf{4}\left(\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\right) \ = \ \mathbf{16}\sqrt{\mathbf{2}} \ - \mathbf{8}$$

Sostituendo questo valore particolare e risolvendo l'equazione, si trovano due radici coincidenti $\boldsymbol{x_{1\equiv\_}x_2} \equiv \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$ **-2** ascissa del punto $T(\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{2}; \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}})$ **-**Vedi discussione grafica

Le dimensioni del rettangolo di perimetro massimo sono:

$\mathbf{2}\boldsymbol{x} = \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{2}}$ **-4** $\qquad \mathbf{2}\boldsymbol{y} = \ \mathbf{2}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{x}) = \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{2}}$