LICEO CLASSICO e SCIENTIFICO
STATALE "Silvio Pellico - Giuseppe Peano"
Corso Giovanni Giolitti, 11 – 12100 Cuneo
tel. 0171 692906 – c.f. 80009910045
liceocuneo.it - info@liceocuneo.it - cnps02000n@pec.istruzione.it
Sez. staccata: Via Massimo D'Azeglio, 8 – 12100 Cuneo

Esame di Stato conclusivo del secondo ciclo di istruzione
a.s. 2020-2021

ARGOMENTO ASSEGNATO PER L'ELABORATO
(O.M. 53 del 03.03.2021)

Nome e cognome: **Nicolas COMBA** Classe: **5** sez. **G**

Discipline di indirizzo: **MATEMATICA E FISICA**

ARGOMENTO:

L'EFFETTO COMPTON

Il candidato introduca l'argomento da un punto di vista storico inquadrandolo nella teoria fisica di riferimento. Descriva la procedura sperimentale utilizzata da Compton e le ipotesi teoriche necessarie per la comprensione del fenomeno.

Il candidato, servendosi delle leggi della dinamica relativistica, risolva il cosiddetto "urto Compton" ricavando la formula dello "spostamento Compton".

Rappresenti graficamente la funzione trovata dandone una interpretazione fisica. Ne individui poi le proprietà prettamente analitiche, soffermandosi in particolare sulle condizioni per l'esistenza di massimi e minimi e sul teorema di Rolle.

Commissari: **prof.ssa Fabrizia De Bernardi**

CONTESTO STORICO E FISICA QUANTISTICA

Le prime ipotesi sulla natura della luce risalgono ai tempi di Newton, il quale riteneva che la radiazione luminosa fosse formata da corpuscoli. Grazie al contributo di Robert Hooke e Christiaan Huygens, ma soprattutto alla teoria elettromagnetica di Maxwell, alla fine dell'800 sembrava assodato che la luce fosse una porzione dello spettro elettromagnetico, quindi un fenomeno esclusivamente ondulatorio.

Alla fine dell'800, dunque con la teoria di Maxwell, la fisica sembrava aver inquadrato tutti i fenomeni naturali allora noti. Tra la fine del secolo XIX e l'inizio del XX tutto l'edificio teorico costruito fu messo in crisi da una serie di esperimenti che non trovavano spiegazione nell'ambito delle leggi classiche.

Da un lato l'incompatibilità delle stesse equazioni di Maxwell con la relatività galileiana fece crollare l'edificio della meccanica newtoniana, che fino ad allora pareva inattaccabile, e portò alla nascita delle teorie relativistiche (1905-1916) dovute ad Einstein.

Dall'altro lato esperimenti riguardanti sistemi microscopici, in diverse zone dello spettro elettromagnetico, condussero alla formulazione delle ipotesi fondamentali della teoria dei quanti, nell'arco dei primi trent'anni del Novecento. La nascita ed evoluzione della fisica dei quanti fu opera di molti scienziati: tra cui Bohr, Planck, Compton, Heisenberg, Pauli, Schrödinger e ovviamente Einstein.

I tre esperimenti cruciali, oltre alle evidenze sperimentali della spettroscopia, che costrinsero i fisici ad una revisione di alcuni concetti della fisica classica e segnarono l'inizio della fisica quantistica, furono:

- l'irraggiamento termico del corpo nero;
- l'effetto fotoelettrico;
- l'effetto Compton.

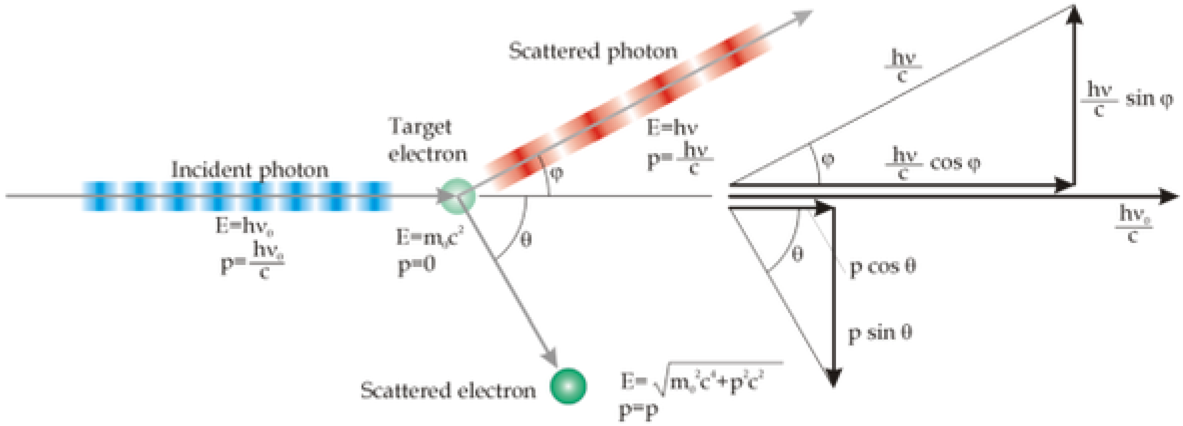
La fisica quantistica nasce nel 1900 con la legge di Planck per l'irraggiamento del corpo nero. Viene introdotta l'ipotesi di quantizzazione dell'energia e compare la costante di Planck h, che caratterizza tutti i fenomeni quantistici. Il quanto di energia è $dE = hf$.

Nel 1905 Einstein, con il suo articolo sull'effetto fotoelettrico, introduce nuove ipotesi sulla natura della luce, sostenendo che l'energia da questa trasportata non ha andamento continuo, ma è concentrata in quantità finite chiamate in seguito "fotoni" da Lewis. Essi si comportano come una particella di energia $E = hv$ e momento $p = h/\lambda$, dove v e λ sono rispettivamente la frequenza e la lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica. Egli, dunque, estende l'idea di Planck di quantizzazione dell'energia alla natura di tutti i fenomeni elettromagnetici.

Il terzo esperimento cruciale sull'interazione radiazione-materia fu svolto da Compton nel 1923. Negli anni '20 Compton si trova al Cavendish Laboratory per studiare l'assorbimento e la diffusione dei raggi γ da parte della materia e osserva un aumento di lunghezza d'onda nella radiazione uscente. Sostenitore convinto della teoria di Maxwell, non accetta che il fenomeno di diffusione implichi una variazione di lunghezza d'onda e tenta di spiegare l'evidenza sperimentale con l'emissione di una nuova radiazione fluorescente. In seguito, trasferitosi in America, decide di approfondire questi studi utilizzando un fascio monocromatico di raggi X. Osserva che il fenomeno è ancora presente anche se in maniera ridotta, ma soprattutto che la radiazione emessa, a differenza della normale fluorescenza, è polarizzata. Nel 1922 decide di utilizzare uno spettrometro di Bragg per studiare direttamente la variazione della lunghezza d'onda dei raggi X in funzione dell'angolo. Misura inizialmente una lunghezza d'onda del 35 % maggiore di quella iniziale. Per giustificare questo valore ricorre alla relazione di Einstein e al principio di conservazione dell'energia e interpreta il processo con un modello quantistico. Aggiunge il principio di conservazione della quantità di moto oltre a quello di conservazione dell'energia ricavando esplicitamente la formula della variazione di lunghezza d'onda in funzione dell'angolo di diffusione. Nel 1923 pubblica l'articolo intitolato "*Una teoria quantistica della diffusione dei raggi X da parte di elementi leggeri".* Questo fenomeno, noto come effetto Compton, è considerato un'importante prova sperimentale della natura corpuscolare della luce e ha contribuito all'affermarsi della meccanica quantistica.

ESPERIMENTO ED EFFETTO COMPTON (1923)
Esso consiste nell'inviare un fascio di raggi X di definita lunghezza d'onda contro un blocchetto di carbone o grafite. Compton utilizza raggi X e non altre onde elettromagnetiche, come la luce, in quanto più energetici, in virtù della loro maggiore frequenza. In questo modo diventa trascurabile l'energia con cui gli elettroni esterni sono legati agli atomi, per cui essi possono essere considerati come liberi.
I raggi X e gli elettroni si comportano nell'esperimento come se si trattasse di un urto meccanico: l'elettrone viene espulso dall'atomo secondo una certa direzione e con una certa velocità e la traiettoria della radiazione incidente viene deviata.
Si osservava che la radiazione diffusa presentava due picchi di intensità: uno corrispondente alla lunghezza d'onda incidente, come ci si aspetterebbe dalla teoria ondulatoria classica (gli atomi entrano in risonanza con la radiazione incidente ed emettono onde della stessa lunghezza d'onda); vi era, però, un secondo picco in una lunghezza d'onda maggiore, cioè una frequenza minore.
La distanza tra i due picchi, $\Delta\lambda$, viene detta spostamento Compton, ed è funzione dell'angolo di incidenza dei raggi X. Come si spiega la presenza del secondo picco?
Compton spiega ciò con l'ipotesi che la radiazione incidente avesse caratteristiche "corpuscolari", fosse cioè composta di fotoni. Questi trasportano quantità di moto, oltre che energia. Decide di trattare l'interazione fotone-elettrone come un urto elastico tra palle da biliardo. Nell'urto la radiazione perde parte della sua energia, e pertanto la radiazione che riemerge dopo l'urto possiede una minore frequenza, quindi una lunghezza d'onda maggiore. L'effetto Compton è particolarmente evidente per lunghezze d'onda piccole, ma è trascurabile per grandi λ.

Compton, avendo calcolato approssimativamente quella che doveva essere la lunghezza d'onda di De Broglie di un elettrone, accelerato da una certa differenza di potenziale, invia un fascio di raggi X su un reticolo di diffrazione opportuno: un bersaglio di grafite. Si osserva un picco di radiazione in una lunghezza d'onda maggiore di quella incidente (quindi frequenza minore). Ciò non è spiegabile dal punto di vista classico.



Trattando il fenomeno come un urto elastico (attribuendo cioè alla radiazione X natura corpuscolare) e applicando la conservazione dell'energia e della quantità di moto (usando le formule relativistiche), si ottiene che la differenza tra la lunghezza d'onda del secondo picco e quella della radiazione incidente, ovvero lo **spostamento Compton**, è data da:

$$\lambda_f - \lambda_i = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - cos\varphi) = \frac{2h}{m_0 c}\, sen^2 \frac{\varphi}{2}$$

Risoluzione dell'urto fotone-elettrone

Si consideri la situazione raffigurata nella figura precedente. Chiamiamo E l'energia; P l'impulso bidimensionale del fotone; Q l'impulso bidimensionale dell'elettrone; V la velocità dell'elettrone dopo l'urto; v la frequenza; m la massa a riposo dell'elettrone. E_{fotone} = hv. $E_{elettrone}$= γmc^2. p_{fotone} = E/c = hv/c.

E totale iniziale: $E_i = hv_i + mc^2$

E totale finale: $E_f = hv_f + \gamma mc^2$

La quantità di moto deve essere scomposta nelle direzioni x e y sia per l'elettrone che per il fotone.

$P_i = (\frac{hv_1}{c}, 0)$ $P_f = (\frac{hv_f}{c} cos\varphi, \frac{hv_f}{c} sen\varphi)$ → impulso bidimensionale fotone iniziale e finale

$Q_i = (0, 0)$ $Q_f = (\gamma mV cos\vartheta, \gamma mV sen\vartheta)$ → impulso bidimensionale elettrone iniziale e finale

Si devono conservare sia l'energia totale sia l'impulso del sistema fotone-elettrone:

- <u>conservazione energia</u>: $E_{tot}(in) = E_{tot}(fin) \rightarrow hv_i + mc^2 = hv_f + \gamma mc^2$ (1)
- <u>conservazione impulso:</u> $P_{tot}(in) = P_{tot}(fin) \rightarrow P_i + Q_i = P_f + Q_f$ (2)

L'energia finale dell'elettrone (E = γmc^2) né si conosce né si misura, quindi la isoliamo mentre l'elettrone, in quanto fermo inizialmente, ha $Q_i = 0$, perciò isoliamo Q_f.

$hv_i - hv_f + mc^2 = \gamma mc^2 \rightarrow h(v_i - v_f) + mc^2 = \gamma mc^2$ (1)

$P_i + 0 = P_f + Q_f \rightarrow P_i - P_f = Q_f$ (2)

L'energia E = γmc^2si può esprimere per mezzo dell'impulso vettoriale Q_f. Si fa ricorso alla relazione pitagorica che lega energia e impulso di una particella materiale relativistica (in questo caso l'elettrone):

E = $\gamma mc^2 = \sqrt{(c\,Q_f)^2 + (mc^2)^2}$ e la sostituiamo nell'equazione (1).

$hv_i - hv_f + mc^2 = \gamma mc^2 \rightarrow h(v_i - v_f) + mc^2 = \sqrt{(c\,Q_f)^2 + (mc^2)^2}$

$P_i + 0 = P_f + Q_f \rightarrow P_i - P_f = Q_f$

Eleviamo entrambe le equazioni al quadrato e sostituiamo al posto di P_i e P_f i rispettivi valori, ricordando le formule goniometriche e che si tratta di grandezze a due dimensioni (x y).

$h^2(v_i - v_f)^2 + (mc^2)^2 + 2h(v_i - v_f)mc^2 = (cQ_f)^2 + (mc^2)^2$

$(Q_f)^2 = (P_i - P_f)^2 = P_i^2 + P_f^2 - 2P_iP$

$h^2(v_i - v_f)^2 + 2h(v_i - v_f)mc^2 = (cQ_f)^2$

$(Q_f)^2 = (\frac{hv_1}{c})^2 + (\frac{hv_f}{c})^2 - 2(\frac{hv_1}{c})(\frac{hv_f}{c} cos\varphi)$

Svolgo i calcoli nella seconda, e moltiplico tutto per c^2.

$h^2(v_i - v_f)^2 + 2h(v_i - v_f)mc^2 = (cQ_f)^2$

$(cQ_f)^2 = (hv_i)^2 + (hv_f)^2 - 2hv_iv_f cos\varphi$

Ora sostituisco il valore di $(c\,Q_f)^2$,trovato nella seconda equazione, nella prima e trovo un unica equazione. Svolgendo i calcoli, semplificando, e sfruttando la relazione c = λfsi arriva alla formula finale.

$h^2(v_i - v_f)^2 + 2h(v_i - v_f)mc^2 = (hv_i)^2 + (hv_f)^2 - 2hv_iv_f cos\varphi$

$h^2v_i + h^2v_f - 2h^2v_iv_f + 2hv_imc^2 - 2hv_fmc^2 = h^2v_i + h^2v_f - 2hv_iv_f cos\varphi$

$(v_i - v_f)mc^2 = hv_iv_f(1 - cos\varphi)$

$\frac{v_i - v_f}{v_iv_f} = \frac{h}{mc^2}(1 - cos\varphi)$

$\frac{1}{v_f} - \frac{1}{v_i} = \frac{h}{mc^2}(1 - cos\varphi)$ (ricordando che c = λf $f = \frac{c}{\lambda}$)

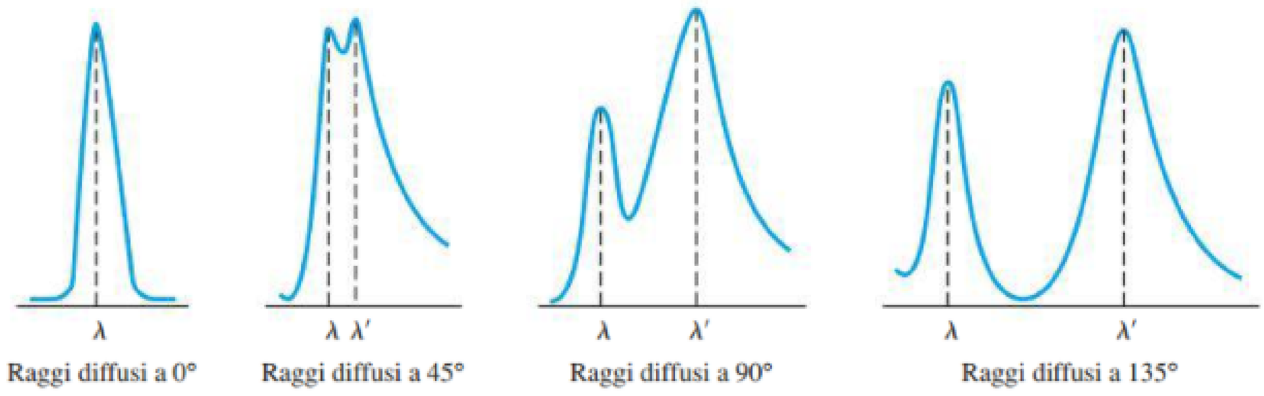
$\frac{\lambda_f}{c} - \frac{\lambda_i}{c} = \frac{h}{mc^2}(1 - cos\varphi)$

$$\lambda_f - \lambda_i = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - cos\varphi) = \frac{2h}{m_0c} sen^2\frac{\varphi}{2}$$

La quantità h/m_0c è detta **"lunghezza d'onda Compton di un elettrone"** e vale:

$$\frac{h}{m_0c} = 2,424 \cdot 10^{-12} \text{m}$$

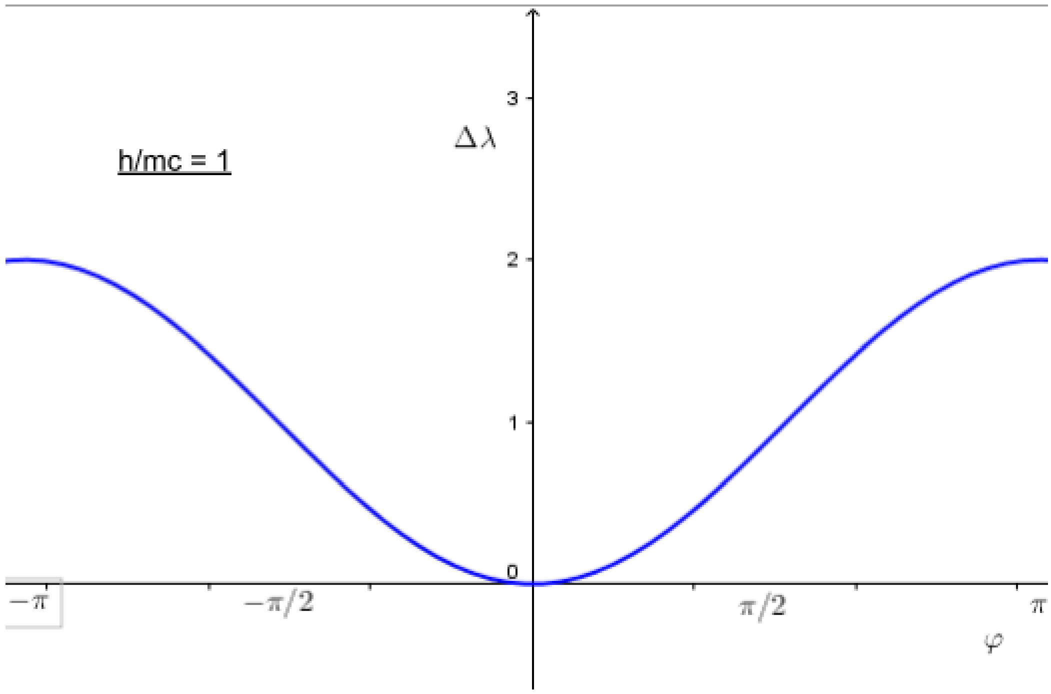
La variazione di lunghezza d'onda, lo spostamento Compton dipende solo dall'angolo di deviazione φ e non dalla lunghezza d'onda incidente. Dai grafici sottostanti si può notare che, sebbene la radiazione incidente sia essenzialmente di una sola lunghezza d'onda λ , i raggi diffusi presentano due picchi di intensità: uno ha la stessa lunghezza d'onda del raggio incidente λ e l'altro lunghezza d'onda λ', maggiore di una quantità Δλ che varia al variare dell'angolo.



Grazie a questo esperimento viene confermata la natura corpuscolare della radiazione elettromagnetica e dimostrata definitivamente l'esistenza del fotone come particella dotata di energia e quantità di moto. Viene verificato che il fotone rispetta la legge di conservazione dell'energia e della quantità di moto in forma relativistica.

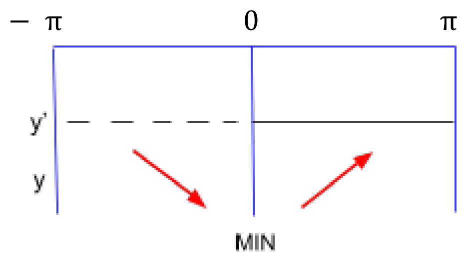
STUDIO FUNZIONE

$$f(x) = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - cos\varphi)$$



Interpretazione fisica:
Compton arriva dunque alla formula finale che è rappresentata da questa funzione moltiplicata per la lunghezza d'onda Compton. In questo grafico l'ho posta uguale a 1. Dal grafico della funzione si può notare come a seconda dell'angolo φ di deviazione varia la lunghezza d'onda diffusa.
- se $\varphi = 0$, $\Delta\lambda = 0$, è il caso dell'urto radente in cui il fotone non devia l'elettrone, non vi è urto e dunque non si crea la seconda lunghezza d'onda;
- se $\varphi = \pi/2$, $\Delta\lambda = h/m_0c = 1$, lo spostamento Compton coincide con la lunghezza d'onda Compton;
- se $\varphi = \pi$, $\Delta\lambda = 2h/m_0c = 2$, si ha il massimo spostamento Compton. E' il caso dell'urto frontale in cui il fotone viene diffuso nella direzione opposta a quella di incidenza. Esso perde il massimo di energia, la frequenza è la più bassa possibile con cui viene diffuso, e quindi la lunghezza d'onda è la più alta possibile, il doppio della lunghezza d'onda Compton.

Studio proprietà analitiche (consideriamo funzione in $[-\pi, \pi]$)
- <u>campo di esistenza:</u> $\forall\varphi \in R$
- <u>simmetrie:</u> è una funzione pari in quanto il coseno è funzione pari.
- <u>segno:</u> $1 - cos\varphi \geq 0 \rightarrow cos\varphi \leq 1 \rightarrow \forall\varphi \in R \rightarrow f(x)\ sempre\ positiva$
- <u>intersezioni con gli assi:</u> $1 - cos\varphi = 0 \rightarrow cos\varphi = 1 \rightarrow \varphi = 2k\pi \qquad P(0, 0)$
- <u>derivata prima</u>: $y = 1 - cos\varphi \rightarrow Dy = sen\varphi \qquad sen\varphi \geq 0 \rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi, + 2k\pi$



La funzione decresce da -π a 0 e cresce da 0 a π. Vi è un punto di minimo a $P(0, 0)$.

MASSIMI E MINIMI

Studiando la funzione dello spostamento Compton si possono trovare dei punti di massimo e minimo della funzione. I massimi corrispondono a $x = \pi + 2k\pi$ e i minimi a $x = 2k\pi$.

- *Def. Un punto x_0 è un punto di massimo relativo per la funzione y = f(x) se:*

$$\exists H(x_0) \, / \, \forall x \in H(x_0),\ f(x) \leq f(x_0)$$

- *Def. Un punto x_0 è un punto di minimo relativo per la funzione y = f(x) se:*

$$\exists H(x_0) \, / \, \forall x \in H(x_0),\ f(x) \geq f(x_0)$$

Teorema di Fermat:

Se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo per una funzione y = f(x) derivabile in quel punto, allora:

$$f'(x_0) = 0$$

La funzione deve essere crescente per $x < x_0$ e decrescente per $x > x_0$ o viceversa. La derivata cambia segno nel passaggio attraverso x_0. Se la funzione è derivabile, le derivate destra e sinistra devono coincidere, quindi necessariamente la derivata è nulla nel punto e la retta tangente è orizzontale.

Criterio per la determinazione di massimi e minimi relativi

1. Funzione derivabile nel punto

MASSIMO

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & x < x_0 \\ f'(x_0) = 0 & \\ f'(x) < 0 & x > x_0 \end{cases}$$

MINIMO

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & x < x_0 \\ f'(x_0) = 0 & \\ f'(x) > 0 & x > x_0 \end{cases}$$

2. Funzione non derivabile ma continua in x

MASSIMO

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & x < x_0 \\ & \\ f'(x) < 0 & x > x_0 \end{cases}$$

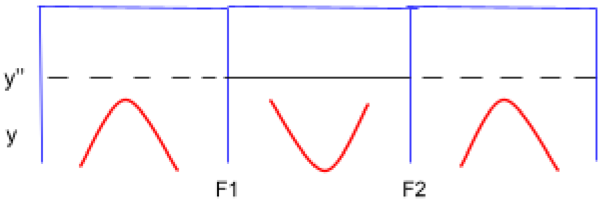
MINIMO

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & x < x_0 \\ & \\ f'(x) > 0 & x > x_0 \end{cases}$$

- <u>derivata seconda:</u>

$y \;=\; 1 - cos\varphi \qquad y' \;=\; sen\varphi \qquad y'' \;=\; cos\varphi \;\rightarrow\; cos\varphi \;\geq 0 \;\rightarrow\; -\frac{\pi}{2} \leq \; x \; \leq \frac{\pi}{2}$

$- \pi \qquad\qquad -\frac{\pi}{2} \qquad\qquad \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \pi$



Nell'intervallo considerato, vi sono 2 flessi, in cui la curva cambia concavità, e y''=0. $F_1(-\ \pi/2, 1)$ e $F_2(\pi/2, 1)$.

TEOREMA DI ROLLE

Hp. $f(x) \;\in\; C[a, b]$ **Th.** $\exists c \;\in\; (a, b) \,/\, f'(c) \;=\; 0$

$f(x) \;\in\; D[a, b]$

$f(a) \;=\; f(b)$

Se una funzione è continua sull'intervallo chiuso [a,b], derivabile sull'intervallo aperto (a,b) e assume valori uguali agli estremi dell'intervallo, esiste un punto interno all'intervallo in cui la derivata prima della funzione si annulla.

Significato geometrico teorema di Rolle:

Una funzione continua sull'intervallo chiuso [a,b] e derivabile sull'intervallo aperto (a,b), che assuma valori uguali agli estremi, ammette almeno un punto interno all'intervallo in cui la retta tangente è parallela all'asse x.

Nel nostro studio di funzione, si può applicare il teorema di Rolle ad un determinato intervallo. Scegliendo il solito intervallo $[-\ \pi, \pi]$ vale il teorema di Rolle, in quanto la funzione è continua sull'intervallo chiuso $[-\ \pi, \pi]$, è derivabile sull'intervallo aperto $(-\ \pi, \pi)$, ed inoltre $f(-\ \pi) \;=\; f(\pi) \;=\; 2$. Di conseguenza esiste almeno un punto nell'intervallo in cui la derivata prima è uguale a zero e la tangente alla curva è orizzontale. Il punto come avevamo già determinato è punto di minimo$P(0, 0)$.

VALORE MEDIO SPOSTAMENTO COMPTON

Secondo il teorema della media se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo [a; b], esiste almeno un punto z dell'intervallo tale che:

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; (b - a) \cdot f(z), \qquad con\, z \;\in\; [a;\ b].$$

Possiamo calcolare perciò il valor medio dello spostamento Compton, considerando l'intervallo $[-\ \pi, \pi]$ e sempre h/mc = 1. Ci calcoliamo prima l'integrale definito a parte:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (1 - cos\varphi)d\varphi \;=\; [x \;-\; sen\varphi]_{-\pi}^{\pi} \;=\; [\pi \;-\; 0 \;+\; \pi \;+\; 0] \;=\; 2\pi$$

$$Valor\, medio \;=\; f(z) \;=\; \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}{\pi-(-\pi)} \;=\; \frac{2\pi}{2\pi} = \; 1$$

Quindi lo spostamento Compton medio è la lunghezza d'onda Compton: h/mc, che si ottiene quando l'angolo di diffusione è 90°.

BIBLIOGRAFIA e SITOGRAFIA:

- James S. Walker, **FISICA Modelli teorici e problem solving 3**, Elettromagnetismo Fisica moderna, Pearson, Milano-Torino, 2016
- dispense della professoressa De Bernardi:
  https://cdn.discordapp.com/attachments/620966585003278337/818812946435276800/Massimi_e_minimi.pdf
  https://cdn.discordapp.com/attachments/620966585003278337/813427303891468368/Teoremi_del_calcolo_differenziale.pdf
  https://cdn.discordapp.com/attachments/620966678624337920/832628843923767326/MQ-De_Bernardi-unito.pdf
- **https://virgilio.mib.infn.it/~terranova/relazione_compton_2011.pdf**
- **https://it.wikipedia.org/wiki/Effetto_Compton**
- **https://www.youtube.com/watch?v=zV_iIDDE6Ug**
- **https://dsfc.univaq.it/lozzi/Scuole/Transizione_classica-quantistica_Teramo_2015.pdf**
- **http://profs.sci.univr.it/~zuccher/downloads/Effetto-Compton-EZ.pdf**

Nicolas Comba