Formule con arcotangenti per il calcolo di π

di Antonino Giambò

1. Il matematico inglese **John Machin** (1680-1751) per primo nel 1706 e successivamente lo svizzero **Leonhard Euler** (1707-1783) hanno proposto rispettivamente le seguenti formule per il calcolo di π:

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{1}{239}\right), \qquad \frac{\pi}{4} = 5\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\,\mathrm{atan}\left(\frac{3}{79}\right).$$

Euler poi ed altri studiosi ne hanno proposte altre dello stesso genere.

Va detto che non si tratta di formule di approssimazione *stricto sensu*, ossia di formule che forniscono l'approssimazione corretta di π fino ad una determinata cifra decimale e non oltre. Come, tanto per fare un esempio, la formula:

$$\pi = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx 3{,}141\,592\,652\,58\,.$$

creata dal geniale matematico indiano **Srinivasa A. Ramanujan** (1887-1920), la quale fornisce un'approssimazione esatta fino alla 8ª cifra decimale.

Si tratta bensì di formule che forniscono il valore "esatto" di π, ammesso che questa locuzione abbia un significato, considerato che π è un allineamento decimale indefinito non periodico. Insomma, la formula permette di trovare quante cifre decimali si vogliano. Ovviamente non "a mano" ma con un computer e un idoneo software. Il software di calcolo MATHEMATICA è un eccellente supporto.

Ma la mia domanda è: Come saltano fuori quelle formule, che invero appaiono perlomeno strane?

Detto in tutta franchezza, non so come le abbiano scoperte e dimostrate Machin ed Eulero, ma so che c'è almeno un procedimento di ricerca e dimostrazione molto elementare, alla portata di uno studente di scuola secondaria di 2° grado. Basta, infatti, conoscere un po' di algebra e un po' di trigonometria.

È di questo procedimento che vado ad occuparmi.

2. Si considera la seguente relazione, nella quale A, B, P, Q sono numeri reali da determinare:

$$\mathrm{A}\,\mathrm{atan}\,\mathrm{P} + \mathrm{B}\,\mathrm{atan}\,\mathrm{Q} = \frac{\pi}{4}.$$

Si pone:

$$\mathrm{atan}\,\mathrm{P} = \mathrm{x}, \quad \mathrm{atan}\,\mathrm{Q} = \mathrm{y}\,; \quad \text{talché:} \;\; \tan\mathrm{x} = \mathrm{P}\,, \quad \tan\mathrm{y} = \mathrm{Q}\,.$$

Essendo pertanto:

$$\mathrm{A}\,\mathrm{atan}\,\mathrm{P} + \mathrm{B}\,\mathrm{atan}\,\mathrm{Q} = \mathrm{Ax} + \mathrm{By}\,,$$

deve risultare:

$$\mathrm{Ax} + \mathrm{By} = \frac{\pi}{4} \quad \text{e perciò:} \quad \tan(\mathrm{Ax} + \mathrm{By}) = 1\,.$$

Ora, com'è noto, si ha:

$$\tan(\mathrm{Ax} + \mathrm{By}) = \frac{\tan\mathrm{Ax} + \tan\mathrm{By}}{1 - \tan\mathrm{Ax}\,\tan\mathrm{By}}.$$

Deve essere dunque:

$$\frac{\tan\mathrm{Ax} + \tan\mathrm{By}}{1 - \tan\mathrm{Ax}\,\tan\mathrm{By}} = 1\,.$$

Da qui, risolvendo rispetto a $\tan\mathrm{By}$, segue:

[1] $$\tan\mathrm{By} = \frac{1 - \tan\mathrm{Ax}}{1 + \tan\mathrm{Ax}}.$$

Questa relazione è fondamentale.

Da qui in poi, infatti, basta attribuire valori arbitrari ad A, B, P e, in conseguenza, trovare il valore di Q.

Si ottengono così quante formule del genere si vogliano (al limite, infinite formule), al netto di difficoltà che possono insorgere durante il procedimento, specialmente se si attribuiscono valori elevati ad A e B.

- Vediamo allora come si ritrova la formula di Machin.

Si pone A=4, B=1 e P=1/5, per cui $\tan x = 1/5$. Adesso, ricorrendo alla formula [1], si calcola $\tan y$:

$$\tan y = \frac{1 - \tan 4x}{1 + \tan 4x}.$$

Occorre adesso esprimere $\tan 4x$ per mezzo di $\tan x = 1/5$.

Si ha:

$$\tan 4x = \tan 2(2x) = \frac{2 \tan 2x}{1 - \tan^2 2x} = \frac{2 \cdot \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}}{1 - \left(\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}\right)^2} = \frac{\frac{4/5}{1 - 1/25}}{1 - \left(\frac{2/5}{1 - 1/25}\right)^2} = \frac{120}{119}.$$

Si trova pertanto:

$$\tan y = \frac{1 - \frac{120}{119}}{1 + \frac{120}{119}} = -\frac{1}{239}.$$

e dunque $Q = \tan y = -1/239$.

In conclusione, avendo posto (per A, B, P) o ricavato (per Q):

$$A = 4, \;\; B = 1, \;\; P = \frac{1}{5}, \;\; Q = -\frac{1}{239},$$

la formula di Machin è dimostrata.

- La formula di Euler si ritrova con un ragionamento analogo, che non ripeto. Forse qualche intoppo si potrà presentare nel momento in cui bisognerà esprimere $\tan 5x$ in funzione di $\tan x$, ma nulla di trascendentale: basta tener presente che $\tan 5x = \tan(4x+x)$ e proseguire nell'elaborazione dell'espressione utilizzando note formule goniometriche.

- Voglio invece far vedere come si possa ottenere un'altra formula, diversa dalle due segnalate. Ma il ragionamento è sempre lo stesso.

Si pone A=2, B=1 e P=1/2, per cui $\tan x = 1/2$. Cosicché, tenendo presente che:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{4}{3},$$

in base alla [1], nella quale adesso B=1, si ricava:

$$\tan y = \frac{1 - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}} = -\frac{1}{7}.$$

Pertanto: $Q = \tan y = -1/7$.

In conclusione, avendo posto o trovato:

$$A = 2, \;\; B = 1, \;\; P = \frac{1}{2}, \;\; Q = -\frac{1}{7},$$

una nuova formula per il calcolo di π è la seguente:

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{atan}\frac{1}{2} - \operatorname{atan}\frac{1}{7},$$

peraltro più semplice delle due formule dalle quali abbiamo preso le mosse.

Con lo stesso ragionamento, anzi con un procedimento più immediato, si trova quest'altra formula, addirittura più semplice della precedente (forse, tra le formule di questo genere, la più semplice in assoluto):

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{atan}\frac{1}{2} + \operatorname{atan}\frac{1}{3}.$$

Ribadisco che tutte queste formule, e le infinite dello stesso tipo che si potrebbero ricavare, sono espressioni equivalenti di $\pi/4$, ragion per cui risulta identicamente:

$$4 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{1}{239}\right) = 5 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \operatorname{atan}\left(\frac{3}{79}\right) = 2 \operatorname{atan}\frac{1}{2} - \operatorname{atan}\frac{1}{7} = \operatorname{atan}\frac{1}{2} + \operatorname{atan}\frac{1}{3} = \cdots.$$

3. Una volta che si è capito come procede la dimostrazione nel caso di due arcotangenti, si possono dimostrare formule analoghe anche nel caso di più arcotangenti.

Per esempio, nel caso di tre arcotangenti, si considera la seguente relazione, nella quale A, B, C, P, Q, R sono numeri reali da determinare:

$$\mathrm{A}\,\mathrm{atan}\,\mathrm{P} + \mathrm{B}\,\mathrm{atan}\,\mathrm{Q} + \mathrm{C}\,\mathrm{atan}\,\mathrm{R} = \frac{\pi}{4}.$$

Si pone:

$$\mathrm{atan}\,\mathrm{P} = \mathrm{x}, \quad \mathrm{atan}\,\mathrm{Q} = \mathrm{y}, \quad \mathrm{atan}\,\mathrm{R} = \mathrm{z}\,; \quad \text{talché:} \;\; \tan \mathrm{x} = \mathrm{P}\,, \quad \tan \mathrm{y} = \mathrm{Q}, \quad \tan \mathrm{z} = \mathrm{R}\,.$$

Essendo pertanto:

$$\mathrm{A}\,\mathrm{atan}\,\mathrm{P} + \mathrm{B}\,\mathrm{atan}\,\mathrm{Q} + \mathrm{C}\,\mathrm{atan}\,\mathrm{R} = \mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz}\,,$$

deve risultare:

$$\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz} = \frac{\pi}{4} \quad \text{e perciò:} \quad \tan(\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz}) = 1\,.$$

Ora, dopo alcune elaborazioni abbastanza semplici, si trova:

$$\tan(\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz}) = \frac{\tan \mathrm{Ax} + \tan \mathrm{By} + \tan \mathrm{Cz} - \tan \mathrm{Ax} \tan \mathrm{By} \tan \mathrm{Cz}}{1 - \tan \mathrm{Ax}\ \tan \mathrm{By} - \tan \mathrm{Ax} \tan \mathrm{By} \tan \mathrm{Cz}}\,.$$

Deve essere dunque:

$$\frac{\tan \mathrm{Ax} + \tan \mathrm{By} + \tan \mathrm{Cz} - \tan \mathrm{Ax} \tan \mathrm{By} \tan \mathrm{Cz}}{1 - \tan \mathrm{Ax}\ \tan \mathrm{By} - \tan \mathrm{Ax} \tan \mathrm{By} \tan \mathrm{Cz}} = 1\,.$$

Da qui, risolvendo rispetto a $\tan \mathrm{Cy}$, segue:

$$\tan \mathrm{Cz} = \frac{1 - \tan \mathrm{Ax} \tan \mathrm{By} - \tan \mathrm{Ax} - \tan \mathrm{By}}{1 - \tan \mathrm{Ax} \tan \mathrm{By} + \tan \mathrm{Ax} + \tan \mathrm{By}}\,.$$

Questa è la relazione fondamentale nel caso di tre arcotangenti.

Da qui in poi, infatti, basta attribuire valori arbitrari ad A, B, C, P, Q e, in conseguenza, calcolare R.

Per esempio, ponendo A=B=C=1, P=$1/2$, Q=$1/5$, si trova facilmente R=$1/8$ e perciò di ricava la formula seguente:

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{atan}\frac{1}{2} + \mathrm{atan}\frac{1}{5} + \mathrm{atan}\frac{1}{8}\,.$$

Allo stesso modo si possono trovare altre formule con tre arcotangenti, ma anche, con un procedimento analogo, quantunque più complicato, altre formule con più di tre arcotangenti.

In tutte queste formule, lo ribadisco, figurano espressioni equivalenti di $\pi/4$. Tali espressioni, dunque, sono identicamente uguali.