LICEO CLASSICO e SCIENTIFICO STATALE "Silvio Pellico - Giuseppe Peano"
Corso Giovanni Giolitti, 11 – 12100 Cuneo tel. 0171 692906 – c.f. 80009910045
liceocuneo.it - info@liceocuneo.it - cnps02000n@pec.istruzione.it *Sez. staccata: Via Massimo D'Azeglio, 8 – 12100 Cuneo*

Esame di Stato conclusivo del secondo ciclo di istruzione
a.s. 2020-2021
ARGOMENTO ASSEGNATO PER L'ELABORATO
(O.M. 53 del 03.03.2021)

Nome e cognome: **Elena ANDREOLETTI** Classe: **5** sez. **D**

Discipline di indirizzo: **MATEMATICA E FISICA**

Argomento:
L'IRRAGGIAMENTO TERMICO E LA NASCITA DELLA FISICA QUANTISTICA

La candidata inquadri storicamente l'argomento descrivendo i tentativi attuati per dare conto dei grafici della radianza spettrale del corpo nero.
Spieghi i limiti di tali tentativi e come le ipotesi di Planck portino invece all'eliminazione di alcuni paradossi: dia una interpretazione fisica dei grafici.
Deduca la legge di Wien dalla legge di Planck, servendosi degli strumenti matematici opportuni.

Cuneo, 29 aprile 2021 i commissari: Laura Di Siena e Fabrizia De Bernardi

Caratteristiche del corpo nero

Un **corpo nero** è un oggetto ideale che assorbe tutta l'energia che riceve sotto forma di onde elettromagnetiche, senza rifletterla. Naturalmente assorbe anche la luce, che è un'onda elettromagnetica, e proprio per questo è nero. L'energia che assorbe viene poi emessa dal corpo sotto forma di radiazione elettromagnetica di qualunque frequenza.

Non tutte le frequenze però hanno uguale intensità al momento dell'emissione: infatti riusciamo a distinguere i diversi colori che assume il corpo nero a seconda delle condizioni. In particolare, la frequenza con maggiore intensità, che quindi prevale sulle altre, dipende solo dalla temperatura del corpo nero, e non dal materiale di cui esso è fatto.

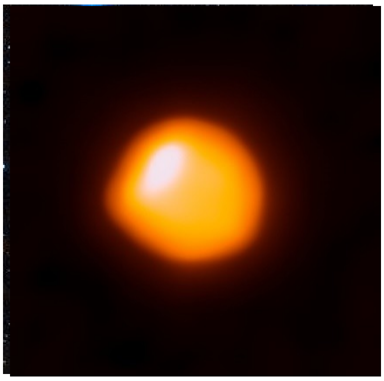
Legge di Wien

Secondo la legge di Wien, la frequenza predominante è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta del corpo nero, secondo la legge

$$\frac{f_{max}}{T} = 5.88 \cdot 10^{10} \frac{Hz}{K}$$

Il colore delle stelle

Grazie a questa legge si può spiegare la relazione tra il colore delle stelle e la loro temperatura. Le stelle più fredde, come Betelgeuse, hanno una colorazione predominante di frequenza minore, e ci appaiono rosse. Invece le più calde, come Rigel, appaiono bianche o azzurre. Il sole è una via di mezzo, per questo ci appare giallo.



Betelgeuse (3.500K) Rigel (11.000K)

Legge di Stefan-Boltzmann

Inoltre la legge di Stefan-Boltzmann stabilisce che l'emittanza di un corpo nero (più comunemente irraggiamento o intensità di radiazione) è direttamente proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta secondo la legge

$$q = \sigma \cdot T^4$$

Dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann e vale

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

La cavità radiante

Una ottima approssimazione per un corpo nero è costituita da una **scatola metallica** detta **cavità radiante** collegata all'esterno da un foro alquanto piccolo. La radiazione che immetto dall'esterno entra tramite il foro nella scatola ed è riflessa dalle pareti, venendo anche assorbita da queste ultime. Se la superficie di tale foro è molto piccola rispetto a quella della cavità posso dire, con buona approssimazione, che la totalità della radiazione incidente sarà assorbita.

Come per una cassa armonica, all'interno della scatola si formeranno delle onde stazionarie con frequenza multipla della frequenza fondamentale immessa precedentemente.

La catastrofe ultravioletta

Rayleigh e Jeans studiano questa situazione dal punto di vista classico, dunque ipotizzano che l'energia trasportata da un'onda possa assumere qualsiasi valore. Secondo la regola di equipartizione dell'energia, basata sulla meccanica classica, nella cavità radiante ogni frequenza multipla dovrebbe avere la stessa energia della frequenza fondamentale immessa nella scatola. In questo la cavità radiante è differente da una cassa armonica poiché l'aria e i materiali che costituiscono lo strumento smorzano il suono già nelle prime armoniche, mentre nella cavità non c'è motivo di pensare che l'energia venga dispersa.

Questo significa che anche le radiazioni ad alta frequenza, come ultravioletti, raggi X, raggi gamma e raggi cosmici, dovrebbero essere prodotte dalla cavità (e quindi da un corpo nero) anche a basse temperature. Ciò però non si verifica sperimentalmente, infatti, se così fosse, sarebbe molto pericoloso prendere il sole o addirittura stare davanti a un caminetto!

Definiamo la **radianza spettrale** come la misura che integrata rispetto alla frequenza (o alla lunghezza d'onda, in alternativa) dà come risultato l'intensità di energia totale

$$\int_0^\infty R(f)\,df = I$$

Secondo Rayleigh e Jeans la radianza spettrale ha la seguente espressione:

$$R(f,T) = \frac{2f^2}{c^2} \cdot k_B T \star$$

Questa formula descrive molto bene l'andamento della curva sperimentale solo per piccoli valori di f.

Inoltre **l'intensità di energia totale** (comprensiva di ogni frequenza) sarà definita del seguente **integrale**:

$$\int_0^\infty R(f,T)\,df = \int_0^\infty \frac{2f^2}{c^2} \cdot k_B T\,df$$

È facile capire che questo integrale diverge, e dunque il corpo nero dovrebbe emanare infinita energia, il che è un assurdo.

Cenni di meccanica statistica

La meccanica statistica studia il comportamento di sistemi composti da un gran numero di particelle. Secondo la meccanica statistica l'energia media è esprimibile come

$$\acute{E}=\sum_n E_n \cdot P(E_n)=\frac{1}{z}\cdot\sum_n E_n \cdot e^{\frac{-E_n}{k_B T}} \ddagger$$

Dove k_B è la costante di Boltzmann, E_n è l'energia di un certo stato e $P(E_n)$ è la sua probabilità, che è proporzionale a $e^{\frac{-E_n}{k_B T}}$. Inoltre $z=\sum_n e^{\frac{-E_n}{k_B T}}$, dunque l'equazione precedente rappresenta una media pesata delle energie.

Per esempio, nel caso di un gas in equilibrio termico posso ricavare grazie a questa formula

$$E_n=k_B T$$

Grazie a questa legge è stato possibile per Rayleigh e Jeans formulare l'espressione ⋆, anche se è evidente che non si accorda con i dati sperimentali.

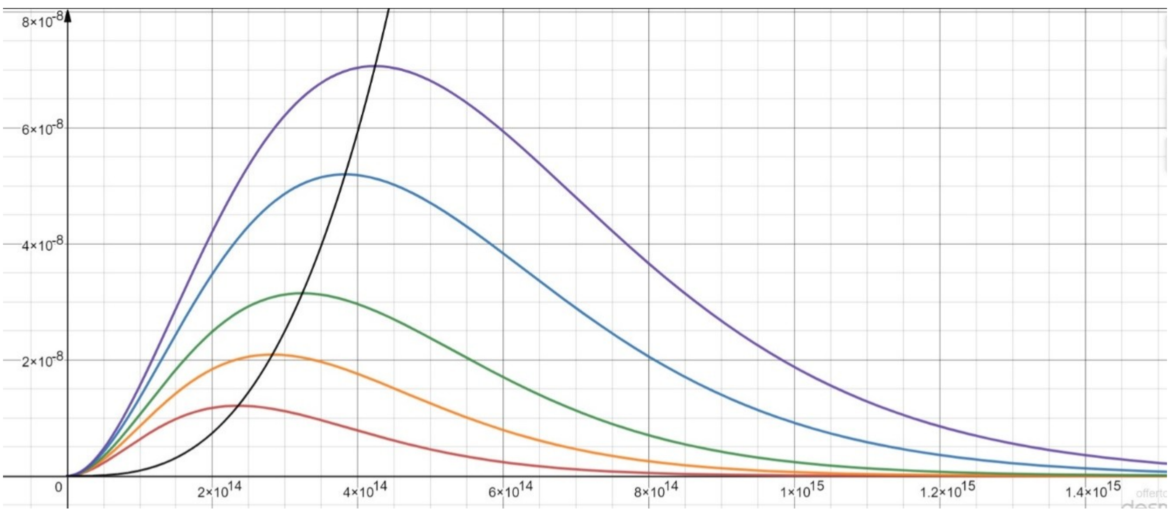
Ipotesi di Planck

La legge elaborata da Planck che definisce la radianza spettrale per ciascuna frequenza a una data temperatura T è in pieno accordo con i valori misurati sperimentalmente

$$R(f)=\frac{2f^2}{c^2}\cdot\frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}}-1} \dagger$$

Dove$c$ è la velocità della luce, k_B è la costante di Boltzmann per i gas e h è una costante, la costante di Planck appunto, che viene quantificata sperimentalmente e vale circa $6{,}626\cdot 10^{-34} J\cdot s$.

Tracciando il grafico della legge di Planck per diverse temperature si ottiene



https://www.desmos.com/calculator/5ilapn8qsk

Si vede chiaramente dal grafico che per frequenze molto alte o molto basse la radianza spettrale tende a zero

$$\lim_{f \to 0} R(f) = 0$$

$$\lim_{f \to \infty} R(f) = 0$$

Infatti, facendo tendere la frequenza a zero, ritroviamo la **legge di Rayleigh e Jeans**

$$\lim_{f \to 0} \frac{2f^2}{c^2} \cdot \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \approx \frac{2f^2}{c^2} \cdot \frac{hf}{\frac{hf}{k_B T}} = \frac{2f^2}{c^2} \cdot k_B T$$

La prima parte di questa formula † è identica a quella di Rayleigh-Jeans, ma c'è un <u>secondo termine che fa sì che essa descriva bene la situazione anche ad alte frequenze</u>. Infatti questa curva ha un **massimo**, che posso trovare facendo la <u>derivata</u> rispetto a f.

$$\frac{d}{df}\left[\frac{2f^2}{c^2} \cdot \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}\right] = \frac{2hf^2}{c^2\left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1\right)} \cdot \left(3 - \frac{hf}{k_B T} \cdot \frac{e^{\frac{hf}{k_B T}}}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}\right)$$

Dalla prima parte intuisco che la pendenza della funzione per frequenze molto alte o molto basse tende a zero.

$$\lim_{f \to 0} \frac{dR(f)}{df} = 0$$

$$\lim_{f \to \infty} \frac{dR(f)}{df} = 0$$

Per trovare il punto di estremo relativo devo risolvere graficamente un'**equazione trascendente**

$$3 - \frac{hf}{k_B T} \cdot \frac{e^{\frac{hf}{k_B T}}}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} = 0$$

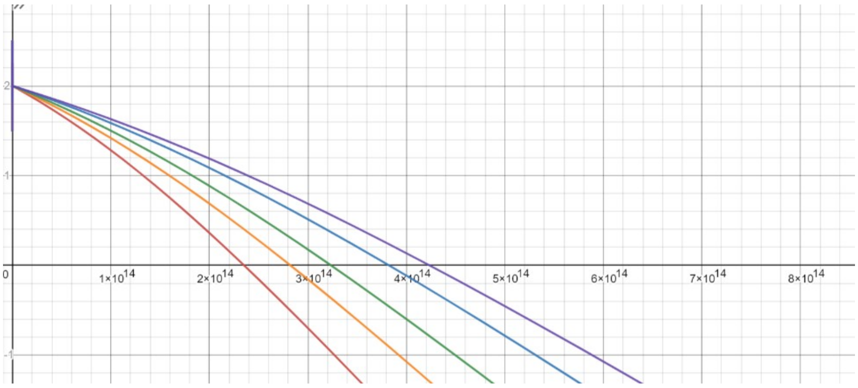
È opportuno risolvere l'equazione con il metodo grafico, dunque calcolando dove il grafico della funzione interseca l'asse x a una data temperatura con il seguente sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 3 - \frac{hf}{k_B T} \cdot \frac{e^{\frac{hf}{k_B T}}}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \end{cases}$$

Che dà come risultato approssimato a una data temperatura

$$f_{max} = 5{,}88 \cdot 10^{10} \frac{Hz}{K} T$$

Che è proprio la **legge di Wien**



I punti in cui il grafico incontra l'asse x sono gli zeri della derivata che cambiano a seconda della temperatura.

https://www.desmos.com/calculator/p57wzqracj

Planck si rende conto che la seconda parte della sua equazione è molto simile a una somma infinita dei termini di una **serie geometrica**, che ricordiamo essere

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \; se |r| < 1$$

Se davvero la soluzione al problema è rappresentata non da un integrale ma da una **somma di termini discreti**, allora vuol dire che l'energia non può assumere tutti i valori in maniera continua, ma solo alcuni valori stabiliti.

Tornando alla formula $\ddagger$, con questa supposizione le energie E_n possono assumere solo alcuni valori. In particolare, sappiamo che la differenza tra due energie non può avere un valore piccolo a piacere, ma **può solo essere un multiplo intero di un'unità fondamentale chiamato quanto di energia** che, per analogia tra le formule, si scopre essere

$$\Delta E = hf$$

Applicando la quantizzazione dell'energia, che è stata inizialmente introdotta per far quadrare i calcoli da un punto di vista matematico, otteniamo che la probabilità degli stati varia proporzionalmente a $e^{\frac{-\Delta E}{k_B T}}$. Ricordando la legge fondamentale della meccanica statistica il valore dell'energia media dipende da queste probabilità. In questo caso devo sommare gli infiniti valori (discreti) che può assumere questa quantità. Il calcolo dell'energia media risulta essere il **rapporto tra due serie convergenti**

$$\acute{E} = \frac{\sum_n E_n \cdot e^{\frac{-E_n}{k_B T}}}{z} = hf \frac{e^{\frac{-hf}{k_B T}} + 2e^{\frac{-2hf}{k_B T}} + 3e^{\frac{-3hf}{k_B T}} + \ldots}{e^0 + e^{\frac{-hf}{k_B T}} + e^{\frac{-2hf}{k_B T}} + \ldots}$$

Posso risolvere facilmente la somma del denominatore, essendo una **serie geometrica convergente**

$$z = e^0 + e^{\frac{-hf}{k_B T}} + e^{\frac{-2hf}{k_B T}} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-nhf}{k_B T}} = \frac{1}{1 - e^{\frac{-hf}{k_B T}}}$$

Nel numeratore si vede chiaramente che E_n assume solo valori multipli di hf. Posso calcolare il risultato della somma al numeratore, che tra l'altro è un multiplo della derivata del denominatore, dunque posso calcolarla facilmente:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cdot e^{\frac{-E_n}{k_B T}}\right) = e^{\frac{-hf}{k_B T}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-nhf}{k_B T}}\right) = \frac{e^{\frac{-hf}{k_B T}}}{\left(1-e^{\frac{-hf}{k_B T}}\right)^2}$$

Quindi, in conclusione

$$\frac{\sum_n E_n \cdot e^{\frac{-E_n}{k_B T}}}{z} = hf\,\frac{\frac{e^{\frac{-hf}{k_B T}}}{\left(1-e^{\frac{-hf}{k_B T}}\right)^2}}{\frac{1}{1-e^{\frac{-hf}{k_B T}}}} = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}}-1}$$

Il fattore così ottenuto è la seconda parte della formula di Planck che va sostituire il termine $k_B T$ (classicamente trovato) della formula di Rayleigh. Questo è il termine che consente alla curva della radianza di non divergere ma di tendere a 0 per f che tende a infinito, e dunque fa sì che la curva sia in accordo con i valori sperimentali.

Energia totale

Per calcolare l'**intensità di energia** totale emessa dal corpo nero sotto forma di una qualsiasi lunghezza d'onda a una data temperatura devo fare un **integrale improprio**.

$$I = \pi \int_0^{\infty} \frac{2f^2}{c^2} \cdot \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}}-1}\, df$$

La cui soluzione è

$$I = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} T^4$$

Che è la legge di Stefan-Boltzmann

Energia quantizzata

Cosa significa concretamente che l'energia è quantizzata? Nemmeno Planck sapeva dare una spiegazione precisa. Egli infatti aveva supposto che gli atomi si comportassero come degli oscillatori armonici, come delle piccole antenne che producono onde elettromagnetiche all'interno della cavità radiante, e soprattutto che potessero effettuare scambi di energia solo in quantità discrete, ovvero i **quanti.** Ma l'ordine di grandezza della costante di Planck fa intuire che nell'esperienza quotidiana sia impossibile percepire gli effetti della quantizzazione dell'energia, e che per problemi più macroscopici le leggi classiche funzionino bene. Infatti facendo tendere h a 0 si giunge alle leggi della fisica classica. Ad oggi la fisica quantistica, nata nel 1900, è la branca della fisica con più applicazioni pratiche e verifiche sperimentali, e secondo alcuni anche quella con più problemi irrisolti.

Radiazione di fondo dell'Universo

La radiazione di fondo dell'universo è stata scoperta nel 1948, ed è tutt'oggi una conferma del modello del Big Bang. Si tratta di una radiazione elettromagnetica quasi completamente isotropa non riconducibile ad alcun corpo massiccio, come stelle o agglomerati di materia. Ha un'intensità prevalente nella regione delle microonde, in particolare alla frequenza di 160 GHz. Se approssimo l'universo a un corpo nero posso utilizzare la legge di Wien per calcolare la temperatura media dell'universo

$$T = \frac{160 \cdot 10^{9}}{5.88 \cdot 10^{10}} \approx 2{,}721\, K$$

La temperatura media misurata attualmente tiene conto di molti altri fattori, per esempio che la radiazione non è perfettamente isotropa ma presenta delle piccole increspature in alcune direzioni, per questo differisce leggermente da quella trovata sopra. Il valore sperimentale è di 2,73K.