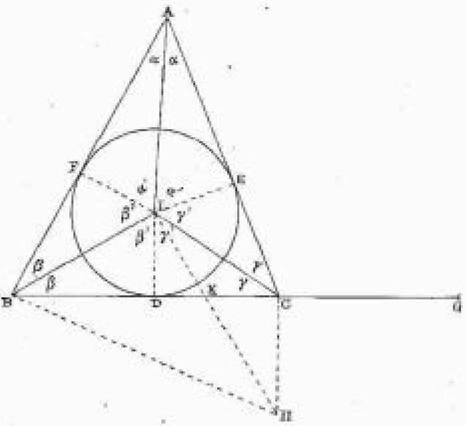
Dimostrazione geometrica della formula dell'area di un triangolo in funzione dei lati

Sia ABC il triangolo dato: si segnino le bisettrici degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e sia I il punto di concorso delle stesse (in-



centro o centro del cerchio inscritto) e siano F, D, E le proiezioni di I sugli stessi lati a, b, c ed

$$IF = ID = IE = r$$

raggio del cerchio inscritto.

Per note proprietà e relative indicazioni:

$$\widehat{A} = 2\alpha \qquad \widehat{B} = 2\beta \qquad \widehat{C} = 2\gamma$$
$$AE = AF; \qquad BF = BD; \qquad CD = CE$$

$$BD + DC + AE = p \quad \text{(semiperimetro del triangolo)}$$

$$\widehat{FAI} = \widehat{EAI} = \alpha \qquad \widehat{FBI} = \widehat{DBI} = \beta \qquad \widehat{ICD} = \widehat{ICE} = \gamma$$

$$\widehat{FIA} = \widehat{EIA} = \alpha' = 90 - \alpha, \quad \widehat{FIB} = \widehat{DIB} = \beta' = 90 - \beta, \quad \widehat{DIC} = \widehat{EIC} = \gamma'$$

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2 \text{ retti}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ retto}$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2 \text{ retti.}$$

Segno in I la perpendicolare alla BI ed in C la perpendicolare alla BC da parte opposta di A rispetto BC e quindi poichè I e la perpendicolare in C sono da bande opposte di BC s'incontreranno in H: congiungo B con H.

L'area del triangolo ABC è, come noto, data da $p \cdot r$; congiungo I con H e poichè situati da bande opposte di BC segue che IH interseca DC in K.

Gli angoli BIH ed BCH sono retti e quindi si trovano sulla semicirconferenza di diametro BH e pertanto i punti B, C, H, I appartengono ad una stessa circonferenza e perciò il quadrangolo $BICH$ è inscritto e perciò gli angoli BIC e BHC sono supplementari. Ora AI, BI, CI sono le bisettrici degli angoli del triangolo ABC e dividono per metà gli angoli FIE, FID, EID e come si è visto la somma delle loro metà equivale a due retti cioè:

$$\widehat{AIF} + \widehat{BID} + \widehat{DIC} = \widehat{AIF} + \widehat{BIC} = 2 \text{ retti}$$

essendo

$$\widehat{BID} + \widehat{DIC} = \widehat{BIC};$$

dal che segue che $\widehat{AIF}$ è il supplementare di $\widehat{BIC}$.

Poichè anche $\widehat{BHC}$ è il supplementare di $\widehat{BIC}$ (due angoli supplementari d'uno stesso angolo sono uguali) così

$$\widehat{BHC} = \widehat{AIF} = \widehat{AIE}.$$

I due triangoli BCH ed AIE rettangoli in C ed in E ed avendo $\widehat{BHC} = \widehat{AIE}$ per dimostrazione precedente sono simili e quindi:

(1) $$BC : CH = AE : IE.$$

Prolungo BC d'un segmento $CG = AE$ ed essendo $IE = ID$ segue:

(2) $$AE : IE = CG : ID$$

e dalla (1) e (2) per la proprietà transitiva

(3) $$BC : CH = CG : ID.$$

I due triangoli DIK e KCH entrambi rettangoli in D ed in C ed avendo gli angoli IKD e CKH eguali perchè opposti al vertice sono simili e quindi

(4) $$CH : ID = CK : DK$$

confrontando (3) e (4) invertendo i medi della (3) che diviene:

$$BC : CG = CH : ID$$

segue:

(5) $$BC : CG = CK : DK$$

e componendo:

(6) $$(BC + CG) : CG = (CK + DK) : DK$$
$$BG : CG = CD : DK$$

e moltiplicando i termini del primo rapporto per BG e del secondo per BD

$$BG \cdot BG : CG : BG = CD \cdot BD : DK \cdot BD$$
$$BG^2 : CG \cdot BG = CD \cdot BD : DK \cdot BD.$$

Dal triangolo rettangolo BIK essendo ID l'altezza relativa all'ipotenusa per proprietà nota:

$$ID^2 = DK \cdot BD$$

e quindi

$$BG^2 : CG \cdot BG = CD \cdot BD : ID^2$$

e poichè il prodotto dei medi è eguale al prodotto degli estremi:

$$BG^2 \cdot ID^2 = CG \cdot BG \cdot BD \cdot CD$$

ed estraendo la radice quadrata si ha:

$$BG \cdot ID = \sqrt{CG \cdot BG \cdot BD \cdot CD}$$
$$BG = p$$

$pr =$ area del triangolo ABC

$$ID = r$$
$$CG = AE = BG - BC = p - a$$
$$BD = BG - DG = BG - (AE + EC) = p - b$$
$$CD = BG - (BD + AE) = BG - (BF + AF) = p - c$$

e pertanto:

$$\text{area } ABC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

LORENZO SIRIATI