

LETTERA DI UN INSEGNANTE SUL TEOREMA DEL VIRIALE

Stamane, durante il compito in classe, ho intuito alcune perplessità sugli esercizi proposti. Fermo restando che, se io e voi non saremo soddisfatti degli esiti della verifica, è sempre possibile rifarla, desideravo analizzare un punto importante, toccato da uno dei quesiti in termini un po' più astratti e formali.

Si supponga di avere un corpo di massa m in orbita circolare stabile di raggio r intorno ad un corpo di massa M , con M molto più grande di m . Si è avuto modo di stabilire in classe, essendo una delle domande, come determinare la velocità orbitale; per percorrere un'orbita con un moto circolare uniforme, è necessaria una forza centripeta F_C di valore

$$F_C = \frac{mv^2}{r},$$

che, nel caso della gravità non relativistica, è data dalla forza F_G di attrazione universale di Newton

$$F_G = G \frac{mM}{r^2}.$$

Uguagliando le due espressioni, si ottiene

$$F_C = F_G \quad \rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2},$$

da cui, con rapidi passaggi algebrici, si ottiene la velocità orbitale

$$v = \frac{\sqrt{GM}}{\sqrt{r}}.$$

Prima di arrivare al punto che si desidera analizzare, vale la pena notare che, come discusso in classe, la velocità di un'orbita stabile circolare diminuisce aumentando il raggio dell'orbita. Si supponga poi, come nel secondo punto del problema di stamane, di voler calcolare l'energia totale E del corpo in orbita. Come è noto, la conservazione dell'energia meccanica impone che

$$E = K + U ,$$

dove K è l'energia cinetica e U quella potenziale. Nel caso in esame, cioè dinamica e gravità non relativistiche, si può scrivere che

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} .$$

Si osserva come il termine di energia potenziale abbia un segno negativo, avendo scelto lo zero dell'energia potenziale ad una distanza infinita. Se si è in orbita circolare stabile, al posto di v è possibile sostituire la velocità orbitale trovata prima, ottenendo

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2}U ,$$

oppure, in maniera equivalente, si può scrivere che

$$E = \frac{mv^2}{2} - mv^2 = -\frac{mv^2}{2} = -K .$$

Questa relazione, in una delle due forme appena scritte, rappresenta un caso particolare di quello che i fisici chiamano *Teorema del viriale*. Stamattina, senza averne parlato prima, vi siete trovati di fronte a questo risultato.

Perché questo teorema è tanto importante?

Intanto, siccome l'energia cinetica K è sicuramente positiva, allora l'energia totale di un sistema legato in orbita è sicuramente negativa. Inoltre, si vede subito che, fornendo energia al sistema, cioè quando E aumenta, l'energia cinetica e la velocità diminuiscono, una considerazione forse controintuitiva: si è abituati a sistemi in cui, se si fornisce energia, le velocità in gioco aumentano. Per esempio, se si somministra energia ad un gas, la velocità delle sue molecole tende ad aumentare, provocando un innalzamento della temperatura. Per un sistema legato gravitazionalmente, invece, sembra che sia vero il contrario, nel senso che più energia si fornisce, più la velocità diminuisce. Il risultato dipende dal fatto che si stanno esaminando sistemi legati, per cui si deve tener conto della particolare forma dell'energia potenziale. Il *Teorema del viriale* si può generalizzare a situazioni molto più complicate ed a potenziali diversi da quello gravitazionale, ma nel caso in esame, piuttosto semplificato, esso consente di osservare un fenomeno interessante.



Si supponga di considerare una nube di gas auto-gravitante, in cui le sue parti sono legate soltanto dalla forza gravitazionale: quando si parla di parti puoi immaginare delle macro parti oppure addirittura le singole molecole che

costituiscono il gas. Se, per qualche motivo, come può essere una fluttuazione casuale, la nube si contrae leggermente, a causa della contrazione, cioè della diminuzione di volume, la nube aumenta leggermente la sua temperatura rispetto al resto dello spazio che la circonda. Allora, per tornare in equilibrio termodinamico con l'ambiente, la nube tenderà a perdere energia, per esempio per irraggiamento. Ma, in forza del Teorema del viriale, è noto che questo porterà ad una contrazione ulteriore e dunque ad un aumento delle velocità delle parti della nube, che implica un aumento della temperatura. Dunque, più perde energia per raffreddarsi, più la nube si contrae e si scalda. Questo tipo di processo instabile auto-alimentato è alla base della formazione di stelle dal collasso gravitazionale di nubi gassose, per esempio idrogeno.

Mi rendo conto di essere stato un po' troppo vago, ma i dettagli li vedremo in quinta. Qui ci tenevo solo a mostrare come anche in un semplice esercizio, come quello del compito di stamattina, si possano nascondere risultati inaspettati ed interessanti. Spero che vi siate divertiti a fare le vostre scoperte e spero davvero che vi sia chiaro, prima o poi, il valore dei compiti in classe non come angoscioso ostacolo da superare, ma come meravigliosa occasione per mettere in campo quello che abbiamo imparato (parlo al plurale non a caso) in un continuo lavoro di scoperta. Avremo, sono sicuro, molte altre occasioni.