Alcuni esempi significativi nell'ambito delle funzioni polinomiali

Ordinaria 2001. PNI quesito 3.
Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.

Ordinaria 2002. PNI quesito 6.
Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ ($p, q \in \mathscr{R}$), se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

Ordinaria 2003. PNI quesito 5.
Dimostrare, usando il ***teorema di Rolle*** *[da Michel Rolle, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione $x^n + a_{n.1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_1x + a_0$*

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n.1}x^{n-2} + ----------a_1$$

Elementi innovativi: le radici di un'equazione algebrica come zeri di una funzione polinomiale.

Il riferimento al teorema di Rolle suggerisce inoltre un metodo per verificare l'unicità dello zero di una qualsiasi funzione in un intervallo di monotonia.

E' bene tener presente che, anche se in molti casi il metodo esclusivamente grafico può sembrare semplice e intuitivo, i risultati devono essere sempre giustificati rigorosamente alla luce dei principali teoremi relativi alla continuità o alla derivabilità (Esistenza degli zeri , teorema dei valori intermedi, teorema di Rolle. teorema di Lagrange)

Risposta al quesito 6. PNI 2002.

La funzione $f(x) = x^n + px + q$ è continua e derivabile ovunque $\forall$ ($p, q \in \mathscr{R}$).

La risposta a questo quesito è suggerita proprio dal quesito precedente (PNI 2001)!

Annullando la derivata prima si trova un'equazione binomia $nx^{n-1} + p = 0$ che ammette al più una soluzione se n è pari e al più due soluzioni se n è dispari. Quindi: Se n è pari, esistono al massimo due zeri per la $f(x)$. Se n è dispari, esistono al massimo tre zeri per la $f(x)$.

Il quesito 5 del 2003 è analogo a quello del 2002 ma mette in risalto, col riferimento storico, l'importanza del teorema di Rolle, la cui portata spesso sfugge agli studenti

Ordinaria 2003 . PNI quesito 6.

Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?

Ordinaria 2005. ordinamento. Quesito 7.
Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali k è f(k)=2? Si illustri il procedimento seguito .

Risposta al quesito 6.PNI 2003

Essendo il polinomio di grado dispari, esiste sicuramente almeno uno zero reale.

L'equazione può essere discussa con opportuni metodi grafici ma, per rimanere in linea coi quesiti precedenti, studiamo gli zeri della derivata della funzione polinomiale associata $f'(x) = 3x^2 + b$.

Poichè l'esistenza di due zeri della derivata è condizione necessaria affinché $f(x)$ *ammetta altri due zeri reali, deve essere* $b < 0$.*La condizione non è però sufficiente, pertanto si deve imporre che i due punti in cui si annulla la derivata (estremi relativi) devono avere ordinate di segno opposto. A parte una moderata laboriosità dei calcoli non è difficile trovare la condizione che il parametro b deve soddisfare, onde scegliere un valore opportuno (deve essere* $b < -\frac{3}{2}\sqrt[3]{98}. \approx 6{,}9156.$)

Risposta al quesito 7. Ordinamento 2005

Nel quesito si chiede, sostanzialmente, di discutere l'esistenza e il numero delle soluzioni reali dell'equazione $f(k) = k^4 - 4k^3 + 4k^2 + 3 \ = 2$,

Non è necessario ricorrere allo studio di funzioni poiché , per via elementare, si trova facilmente che l'equazione non può ammettere radici reali.

Scrivendo l'equazione nella forma

$$k^2(k^2 - 4k + 4) + 1 = 0 \to k^2(k-2)^2 + 1 = 0$$

si riconosce che non può ammettere soluzioni reali in quanto il primo membro è positivo $\forall k \ \in \ \mathcal{R}$

Straordinaria 2002

Quesito 6
Considerata l'equazione $x^2 + kx + k = 0$, *calcolare il limite di ciascuna delle sue radici per* $k \to +\infty$

Quesito 8
Dimostrare che le curve di equazione $y = x^2 + kx + k$, *assegnate in un riferimento cartesiano, passano tutte per uno stesso punto.*

Soluzione del quesito 6

Le due radici sono $x_1 = \frac{-k-\sqrt{k^2-4k}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{-k+\sqrt{k^2-4k}}{2}$ reali per $k \leq 0 \quad \cup \quad k \geq 4$

Si trova facilmente

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-k-\sqrt{k^2-4k}}{2} = -\infty \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{-k+\sqrt{k^2-4k}}{2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{-k^2+k^2-4k}{2\left(k+\sqrt{k^2-4k}\right)} = \lim_{k\to+\infty} -\frac{4}{2\frac{\left(k+\sqrt{k^2-4k}\right)}{k}} =$$

$$\lim_{k\to+\infty} -\frac{4}{2\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{k}}\right)} = -1$$

Soluzione del quesito 8

Si tratta di un fascio di parabole con asse parallelo all'asse y.

L'equazione è combinazione lineare di $y - x^2 = 0 \quad e \quad x + 1 = 0$ (equazioni delle due generatrici)

Le coordinate dei punti comuni alle due generatrici, in questo caso il punto A (-1;1), soddisfano anche l'equazione del fascio, come si può verificare direttamente.

Pertanto, tutte le parabole del fascio passano per lo stesso punto A.

Osservazioni

L'evidente legame tra i due quesiti suggerisce alcune osservazioni e alcuni spunti di approfondimento.

- Le due radici dell'equazione del primo quesito rappresentano le ascisse dei punti comuni all'asse x e alla generica parabola del fascio.
- Il calcolo dei due limiti $\lim_{k\to+\infty} x_1 = -\infty$ e $\lim_{k\to+\infty} x_2 = -1$ ha un preciso significato geometrico?
- I due risultati potevano essere previsti attraverso lo studio del fascio di parabole?

Lo studente dovrebbe essere in grado di rispondere alla prima domanda. Quando, nello studio elementare dei fasci di rette o di coniche, non si fa uso di una coppia di parametri omogenei, si fa presente che una delle due generatrici non corrisponde ad alcun valore del parametro e si ottiene come posizione limite della generica curva del fascio, al tendere all'infinito del parametro stesso.

Nel nostro caso la generatrice «esclusa» ha equazione $x + 1 = 0$ e incontra l'asse delle x nel punto di ascissa -1, che è proprio il risultato di uno dei due limiti. E se considerassimo anche il limite delle due radici per $k \to -\infty$?

Per giustificare l'altro risultato e rispondere poi alla seconda domanda lo studente dovrebbe conoscere l'ampliamento proiettivo del piano euclideo e le coordinate omogenee . Perchè no?

In fondo un problema è veramente fecondo se, una volta risolto, ne genera altri e stimola la curiosità.

Soluzione del quesito «tartinvilliano»

E' assegnata l'equazione

$$(m-1)x^2 - (m-5)x + (m-1) = 0.$$

Per quali valori del parametro m le radici appartengono all'intervallo $[-2; -1]$*?*

1. Metodo diretto

Poiché se $m = 1$ l'equazione ammette la sola soluzione $x = 0$, non accettabile, si può porre $m \neq 1$ e applicare la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado

$$(m-1)x^2 - (m-5)x + (m-1) = 0 \to x_1 = \frac{m-5-\sqrt{\Delta}}{m-1} \; ; x_2 = \frac{m-5+\sqrt{\Delta}}{m-1}$$

Si impone la realtà delle radici $\Delta \geq 0 \to (m-5)^2 - 4(m-1)^2 = -(m+3)(3m-7) \geq 0 \to -3 \leq m \leq \frac{7}{3}$

Se $m = -3$ *risulta* $x_1 = x_2 = 1$ *non accettabile, mentre se* $m = \frac{7}{3}$ *risulta* $x_1 = x_2 = -1$ *soluzione limite accettabile.*

Può essere utile osservare che deve essere $m > 1$*, altrimenti, dal teorema di Cartesio, si deduce che l'equazione ammette due radici positive, quindi non accettabili*

Si impongono le due condizioni assegnate, per le due radici, impostando i due sistemi di disequazioni

a) $\begin{cases} \frac{m-5-\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \geq -2 \\ \frac{m-5-\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \leq -1 \\ 1 < m \leq \frac{7}{3} \end{cases}$ B) $\begin{cases} \frac{m-5+\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \geq -2 \\ \frac{m-5+\sqrt{21-2m-3m^2}}{2(m-1)} \leq -1 \\ 1 < m \leq \frac{7}{3} \end{cases}$

Svolgendo i calcoli si trova che il primo sistema è risolto nell'intervallo $\left[\frac{15}{7};\frac{7}{3}\right]$ mentre il secondo ammette soluzioni solo per $m = \frac{7}{3}$.

Possiamo concludere che l'equazione $(m-1)x^2 - (m-5)x + (m-1) = 0$ ammette una soluzione appartenente all'intervallo $[-2;-1]$ se i valori del parametro m appartengono all'intervallo $\left[\frac{15}{7};\frac{7}{3}\right[$

Se $m = \frac{7}{3}$ i hanno due soluzioni coincidenti con $x_1 = x_2 = -1$

2. **Metodo di Tartinville.**

Sfruttando alcuni dei risultati precedenti possiamo affermare che m deve variare nell'intervallo

$$\left]1;\frac{7}{3}\right]$$

Si studia la posizione dei due limiti, $\alpha = -2$ e $\beta = -1$ rispetto alle radici dell'equazione
Essendo il primo coefficiente dell'equazione, a, sempre positivo nell'intervallo considerato ed essendo

$\boldsymbol{f(\alpha)} = f(\boldsymbol{-2}) = 4m - 4 + 2m - 10 + m - 1 = \boldsymbol{7m - 15}$

$\boldsymbol{f(\beta) = f(-1)} = m - 1 + m - 5 + m - 1 = \boldsymbol{3m - 7}$

possiamo affermare che

il limite $\boldsymbol{\alpha}$

è discorde con a e quindi interno alle due radici se $1 < m < \frac{15}{7}$

coincide con x_1 se $m = \frac{15}{7}$

è concorde con a e quindi esterno alle due radici se $\frac{15}{7} < m < \frac{7}{3}$

il limite $\boldsymbol{\beta}$ è discorde con a e quindi interno alle due radici (se $1 < m < \frac{7}{3}$)

o coincidente con entrambe (se $m = \frac{7}{3}$)

Concludendo

$1 < m < \frac{15}{7}$	$\boldsymbol{x_1}$_____ -2___ -1__$\boldsymbol{x_2}$	*soluzioni non accettabili*
$m = \frac{15}{7}$	$\boldsymbol{x_1} \equiv \boldsymbol{-2}$_____ -1__$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_1}$ *soluzione limite accettabile*
$\boldsymbol{\frac{15}{7} < m < \frac{7}{3}}$	_____ -2 __$\boldsymbol{x_1}$_____ -1__$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_1}$ *soluzione limite accettabile*
$\boldsymbol{m = \frac{7}{3}}$	____________ $\boldsymbol{x_1 \equiv x_2 \equiv -1}$	*2 soluzioni limite coincidenti accettabili*

in accordo con il risultato trovato col metodo diretto.

3.Metodo grafico

L'equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1} \\ y = m \\ -2 \le x \le -1 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono punti comuni a una retta parallela all'asse delle x e un arco di curva, grafico di una funzione algebrica razionale fratta , continua e derivabile in $\mathbb{R}$..

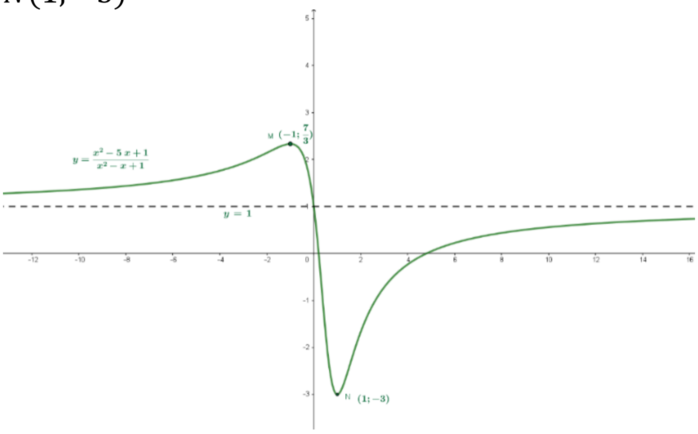
lo studio della funzione $f(x) = \frac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$ e della sua derivata $f'(x) = \frac{4(x^2-1)}{(x^2-x+1)^2}$ porta ai seguenti risultati:

La funzione ha per asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 1$

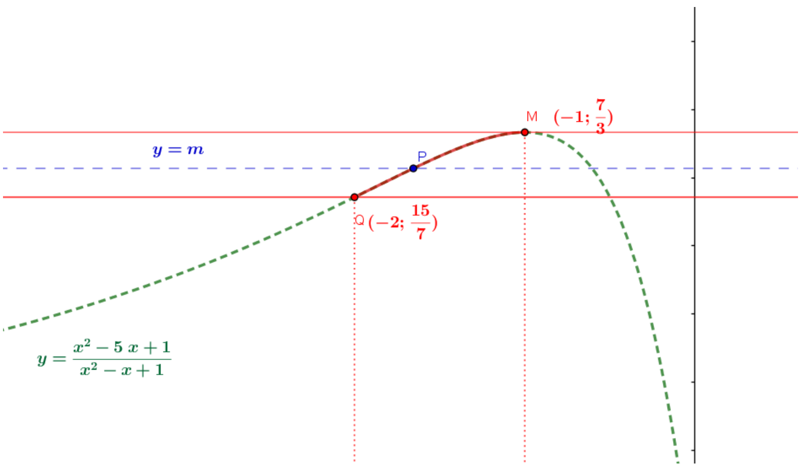
E' monotona crescente negli intervalli $]-\infty; -1[$ e $]1: +\infty[$

E' monotona decrescente nell'intervallo $]-1; 1[$

Ha un massimo relativo e assoluto nel punto $M(-1; \frac{7}{3})$ e un minimo relativo e assoluto nel punto $N(1; -3)$



Per la discussione i prende in considerazione solo l'arco QM, di estremi
$Q\left(-2; \frac{15}{7}\right)$ e $M\left(-1; \frac{7}{3}\right)$



La funzione, nell'intervallo $[-2; -1]$ è continua e monotona crescente, assume valore minimo nel primo estremo e il valore massimo nel secondo e assume inoltre ogni valore tra essi compreso.

Possiamo pertanto affermare che ha uno e un sol punto di intersezione con ciascuna retta del fascio $y = m$.

Per l'equazione $(m-1)x^2 - (m-5)x + (m-1) = 0$ si ritrovano, pertanto, gli stessi risultati degli altri due metodi.