LICEO CLASSICO e SCIENTIFICO
STATALE "Silvio Pellico - Giuseppe Peano"
Corso Giovanni Giolitti, 11 – 12100 Cuneo
tel. 0171 692906 – c.f. 80009910045
liceocuneo.it - info@liceocuneo.it - cnps02000n@pec.istruzione.it
Sez. staccata: Via Massimo D'Azeglio, 8 – 12100 Cuneo

Esame di Stato conclusivo del secondo ciclo di istruzione

a.s. 2020-2021

Candidata: **Giada FERRERO** Classe**: 5** sez. **G**

Discipline di indirizzo: **MATEMATICA E FISICA**

ARGOMENTO:

LA TEORIA DI MAXWELL E LA SUA IMPORTANZA STORICA

La candidata introduca l'argomento dal punto di vista storico, soffermandosi sull'importanza del concetto di campo di forze. Fornisca un quadro completo della teoria, illustri le caratteristiche estetiche delle equazioni di Maxwell e ne spieghi il significato fisico.
Ricavi da queste equazioni la velocità della luce nel vuoto ed esponga le conseguenze più importanti della teoria del campo elettromagnetico sull'evoluzione della fisica e della tecnica.
Approfondisca il concetto di continuità di una funzione, la relazione tra derivabilità e continuità portando esempi possibilmente correlati con l'argomento trattato.

INDICE

- **INTRODUZIONE STORICA:**

James C. Maxwell è considerato colui che effettuò la sistemazione teorica dell'elettromagnetismo, infatti riuscì a ricondurre i risultati ottenuti dai suoi predecessori a una teoria più generale, in grado di spiegare i singoli fenomeni in maniera coerente.

Nell'inverno del 1819 Hans Christian Öersted eseguì una esperienza che cambiò completamente il corso successivo dello studio dei fenomeni elettrici e magnetici. In tale esperienza Öersted osservò la deflessione di un ago magnetico posto in vicinanza di un filo percorso da corrente, individuando un legame tra effetti elettrici e magnetici.

Ampère, venuto a conoscenza della scoperta di Öersted attraverso l'Accademia di Francia, fu estremamente colpito dall'esperienza e immediatamente pensò alla possibilità che oltre che tra correnti e magneti, ci potesse essere un effetto di interazione fra le correnti. Appena una settimana dopo, Ampère presentò e dimostrò l'esistenza degli effetti mutui fra le correnti. Nel frattempo, Biot e Savart comunicarono, e immediatamente dopo pubblicarono, la legge quantitativa del fenomeno scoperto da Öersted che, viceversa, si era limitato ad una semplice illustrazione qualitativa.

Legge di Biot-Savart: $B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \cdot r}$

Hans Christian Öersted (1777-1851)

André-Marie Ampère (1775-1836)

Ampère proseguì con i suoi lavori e riuscì a ridurre tutti i fenomeni e le leggi dell'interazione elettromagnetica in termini puramente newtoniani, introducendo la famosa legge elementare di Ampère che fornisce l'interazione fra due elementi di corrente: $F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i_1 i_2 l}{d}$. Nella stessa memoria pose inoltre le fondamenta dell'altro grandissimo contributo dato all'elettrologia: l'ipotesi che tutti i fenomeni magnetici fossero dovuti esclusivamente all'interazione tra correnti.

Era stato ormai dimostrato che una corrente genera quello che noi oggi chiamiamo un campo magnetico e quindi agisce sia sulle altre correnti sia sull'ago magnetico.
Era abbastanza naturale pensare che ci dovesse essere una simmetria e quindi che dovesse esistere un effetto dei campi magnetici sulle correnti elettriche. Ampère dal '27 in poi andò alla ricerca, inutilmente, di tale effetto. L'effetto fu infine trovato da un fisico inglese, Michael Faraday, il quale è stato tra i più grandi scienziati sperimentali di tutti i tempi.

Il 29 agosto del 1831, Faraday scoprì il fenomeno dell'induzione elettromagnetica. Faraday notò che variando il campo magnetico prodotto da una delle due correnti si otteneva un effetto di corrente indotta sull'altra. Il motivo per cui non si era riuscito ad individuare tale effetto era che tutti, fino ad allora, avevano effettuato esperimenti con campi stazionari. In realtà il fenomeno dell'induzione elettromagnetica era stato già scoperto da Henry in America, il quale però pubblicò i suoi risultati con un anno di ritardo su una rivista americana. All'epoca pubblicare su una rivista americana significava non essere letti dalla scienza che contava, e la sua scoperta rimase praticamente sconosciuta.

Diario di laboratorio di Faraday

Faraday per arrivare a scoprire il fenomeno dell'induzione elettromagnetica svolse due esperimenti. Per il primo esperimento egli utilizzò un magnete e un solenoide collegato ad un amperometro e, mettendo in moto il magnete, si poteva notare come ci fosse una variazione della corrente. Per il secondo esperimento Faraday utilizzò un nucleo di materiale ferromagnetico con 2 avvolgimenti detti primario e secondario. Il primario è composto da una batteria e un interruttore mentre il secondario, collegato ad un amperometro, è privo di batteria. Tra i due avvolgimenti non esiste alcun contatto fisico. Constatò come al variare della corrente nel primario si generi una corrente nel secondario detta corrente indotta.
Successivamente lo stesso Faraday scoprì l'effetto giromagnetico, cioè l'esistenza di un effetto del campo magnetico sulla polarizzazione della luce, ed affrontò lo studio dei fenomeni di polarizzazione elettrica e

magnetica. Ciò lo portò ad elaborare il concetto di campo come un insieme di linee di forza che in qualche modo riempiono lo spazio e trasmettono le azioni.


Michael Faraday (1791-1857)

Nonostante i contributi dati, lo sviluppo immediatamente successivo dell'elettromagnetismo non seguì la via proposta da Faraday.

La ragione fondamentale di ciò risiede da un lato nell'assoluto dominio del paradigma newtoniano nella fisica del tempo, dall'altro nel fatto che Faraday, non avendo una profonda base matematica, non fu capace di formulare le idee in un modo accettabile secondo i criteri elaborati per la fisica matematica, portati a sommi livelli dalla scuola continentale europea.

La teoria dei fenomeni elettromagnetici fu sviluppata, pertanto, ancora in termini di azioni a distanza.

Tale approccio fu formalizzato da due tedeschi, Neumann e Weber, i quali, ad un anno di distanza, elaborarono due teorie delle azioni elettromagnetiche semplicemente in termini di azioni a distanza fra particelle in moto.

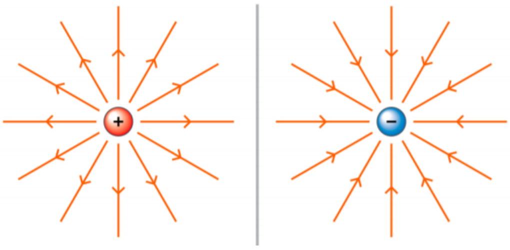
Invece Maxwell, proseguendo sulla via iniziata da Faraday riuscì a compiere l'unificazione delle teorie dell'elettromagnetismo rendendolo uno dei più importanti e influenti fisici del tempo.

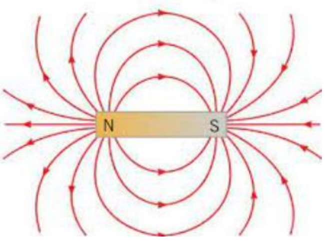
La storia del cammino verso le equazioni di Maxwell fornisce un meraviglioso esempio del modo in cui la Scienza si sviluppa e del complesso rapporto fra teoria ed esperienza. Per quanto l'esperienza spesso indirizzi lo sviluppo delle teorie e, a volte, costringa a modificarle o a svilupparne di nuove, il caso delle equazioni di Maxwell (come quello della rivoluzione copernicana) mostra come innovazioni teoriche cruciali possano essere il prodotto di un diverso modo di guardare agli stessi fenomeni, alternativo rispetto al paradigma dominante e frutto, in ultima analisi, di istanze "metafisiche".

- **CONCETTO DI CAMPO DI FORZE**

Il concetto di campo è fondamentale per la fisica e la sua introduzione ha rappresentato una delle più grandi rivoluzioni avvenute nella fisica. È stato introdotto e usato in modo esplicito per la prima volta da Eulero per descrivere il comportamento dei fluidi. Tale concetto venne applicato in innumerevoli situazioni a partire dal XVIII secolo ma solo con Faraday e Maxwell si affermò definitivamente.

Per rappresentare graficamente i campi e le forze noi partiamo dalla rappresentazione delle particelle tramite punti atti ad individuarne la posizione, per poi proseguire rappresentando i campi con linee di forza che ne descrivono la distribuzione nello spazio.


Linee di forza del campo elettrico per cariche positive e negative



Linee di forza del campo magnetico

Oggi sappiamo che queste linee sono una mera rappresentazione grafica del campo e non posseggono proprietà materiali.

Nell'antichità, e fino ai tempi di Newton, si pensava che per poter originare una forza che agisse su un corpo fosse necessario un qualsiasi tipo di contatto. La teoria gravitazionale di Newton mise in crisi questo pensiero mostrando come i corpi potessero interagire tra loro anche senza contatto o senza che tra essi venisse interposto un mezzo materiale che facesse da supporto alla propagazione della forza.

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

La forza di gravità viene rappresentata da una legge semplice e bella, valida universalmente.
Newton non riusciva ad accettare che due masse potessero interagire a distanza essendo realmente separate dal vuoto. Molti fisici dopo Newton lavorarono in questa direzione introducendo l'ipotesi di un mezzo continuo (l'etere) che consentisse all'azione di propagarsi da un corpo all'altro. Si pensava che tale mezzo sfuggisse all'evidenza sperimentale a causa della inadeguatezza degli strumenti.
Tuttavia alcuni fisici, tra cui l'italiano Boscovich, continuarono a credere alla possibilità dell'azione a distanza.

Anche Faraday e Maxwell, a cui si deve l'introduzione del concetto di campo, pensavano in realtà ai campi come stati dell'etere. Faraday elaborò il concetto di campo come un insieme di linee di forza che in qualche modo riempiono lo spazio e trasmettono le azioni. Probabilmente, l'origine di questa concezione è il ben noto esperimento delle linee di forza visualizzate con la limatura di ferro ed egli attribuì a tali linee proprietà materiali.
Per Maxwell è ancora naturale inizialmente pensare al campo come ad uno stato dell'etere e fornirne uno schema di tipo prettamente meccanicistico. L'etere doveva avere però una serie di caratteristiche molto particolari e contraddittorie e lentamente si iniziò a pensare ad esso come a qualcosa di molto diverso dalla materia allora conosciuta, come a qualcosa di distinto dalla materia.

Si potrebbe pensare, a primo impatto, che sia più vantaggioso descrivere la dinamica di un sistema utilizzando le forze al posto dei campi. In realtà, però, il principio di azione e reazione che sta alla base del concetto di forza è una legge sottile ed approssimata: afferma che le due forze sono uguali nello stesso istante e per questo motivo non sempre è verificato. Quindi analizzando la questione in termini di campo la trattazione è più semplice.
Il campo è utile per la descrizione matematica, ma non solo: è un ente fisico reale. Einstein, nella relatività generale, descriverà come il campo diventa la geometria stessa dello spazio-tempo. La grandezza matematica che descrive il campo gravitazionale è anche la metrica dello spazio-tempo, ne descrive la curvatura.

In definitiva il dualismo materia-campo venne abolito dalla fisica quantistica. Con Dirac, Pauli ed altri nasce l'idea di campo quantistico: le particelle sono eccitazioni quantistiche dei campi ad esse associati. L'unico oggetto fisico ora è il campo, quando era stata la materia a dominare per secoli lo scenario della fisica.

Ciò che Coulomb descriveva come forza tra particelle distinte, Maxwell come l'effetto del campo generato dalla prima particella sulla seconda e viceversa, oggi è descritto completamente in termini di campo

- **TEORIA DI MAXWELL**

Il lavoro di costruzione dell'elettromagnetismo da parte di Maxwell fu portato avanti in un tempo relativamente ristretto ed è tutto contenuto, sostanzialmente in tre memorie. La prima, *On Faraday lines of force* e pubblicata nel 1956. La seconda, *On physical lines of force* fu pubblicata in più parti, nel 1861 e nel 1862. La terza: *A dynamical theory of the electromagnetic field* pubblicata nel 1864.

Nella prima memoria l'obiettivo di Maxwell è dimostrare che le concezioni di Faraday potevano essere formalizzate in un modo matematicamente ineccepibile e, quindi, accettabile come descrizione possibile delle interazioni elettrodinamiche ed elettromagnetiche.


James Clerk Maxwell (1831-1879)

Il modello utilizzato nella seconda memoria partiva dalla considerazione degli effetti giromagnetici, che suggerivano di associare al magnetismo una rotazione. Maxwell concepì il campo magnetico come dovuto a vortici la cui velocità era proporzionale al campo magnetico. Per permettere ai vortici di girare nella stessa direzione, fra un vortice e l'altro Maxwell inserì delle sferette che rotolano senza strisciare. Analizzando matematicamente questo modello, Maxwell riuscì immediatamente a dimostrare che c'era una relazione puramente cinematica fra la velocità con cui ruotano i vortici (cioè il campo magnetico) e la velocità con cui si spostano queste sferette (o meglio il numero di sferette che passa attraverso una superficie nell'unità di tempo). Interpretando il moto di queste sferette come corrente elettrica ottenne la legge di circuitazione di Ampère.

Nella terza memoria Maxwell adottò solo le leggi della dinamica nella loro forma più generale. Postulò unicamente l'esistenza di un mezzo meccanico sede dei fenomeni elettromagnetici. Identificò i parametri fondamentali dinamici in termini elettromagnetici e sviluppò le equazioni fondamentali che oggi sono alla base dell'elettromagnetismo. Nella stessa memoria sviluppò a fondo la teoria elettromagnetica della luce non più, questa volta, deducendola da un modello ma dalle equazioni del campo elettromagnetico.

Le equazioni appaiono per la prima volta al completo e in forma differenziale nella terza memoria nel 1865, mentre la notazione moderna più comune fu sviluppata da Oliver Heaviside.

- **LE EQUAZIONI**

Forma differenziale:

1. $\nabla \cdot E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
2. $\nabla \cdot B = 0$
3. $\nabla \times E = -\frac{\partial \mathrm{B}}{ft}$
4. $\nabla \times B = J + \frac{\partial \mathrm{E}}{ft}$

Forma integrale (notazione moderna):

1. $\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$
2. $\phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
3. $C(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$
4. $C(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt}$

La prima equazione enuncia che il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla carica contenuta nella superficie, ed è stata presa dal Teorema di Gauss per il campo elettrostatico.
Il significato fisico della prima equazione è che le linee del campo elettrostatico, le quali sono linee aperte; e ciò deriva dalla possibilità di isolare cariche elettriche.

La seconda equazione enuncia che il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è nullo. Anche essa appartiene al Teorema di Gauss per il campo magnetico. Il significato fisico della seconda equazione è che le linee del campo magnetico, le quali sono linee chiuse a differenza di quelle del campo elettrostatico, e perciò non esistono in natura monopoli magnetici, secondo la fisica classica.

La terza equazione enuncia che la circuitazione del campo elettrico è pari all'opposto della derivata del flusso magnetico rispetto al tempo. Essa è frutto della legge di Faraday-Lenz. Il significato fisico della terza equazione è che un campo magnetico a flusso variabile genera un campo elettrico indotto. Tale campo non è un campo conservativo essendo la circuitazione diversa da zero.

La quarta equazione enuncia che la circuitazione del campo magnetico è pari al prodotto della permeabilità magnetica per la somma algebrica delle correnti concatenate con la linea chiusa considerate e della corrente di spostamento. Essa deriva dalla correzione, fatta da Maxwell per risolvere un paradosso, del teorema di Ampère, con l'aggiunta della corrente di spostamento. Il significato fisico della quarta equazione è che una corrente elettrica o un campo elettrico a flusso variabile generano un campo magnetico. Tale campo non è un campo conservativo essendo la circuitazione non nulla.

- **CARATTERISTICHE ESTETICHE**

Le equazioni di Maxwell vengono ritenute tra le più belle di tutta la fisica per semplicità, sintesi e simmetria. Infatti in esse si possono rintracciare simmetrie e asimmetrie. Le equazioni di Maxwell insieme all'espressione della forza di Lorentz descrivono completamente il comportamento del campo elettromagnetico in una forma semplice.

L’asimmetria del sistema di equazioni è evidente nella contrapposizione delle due leggi riguardanti il flusso e delle due riguardanti la circuitazione.
Nella equazione del calcolo del flusso di B è assente un equivalente della carica elettrica che si trova nella equazione del flusso di E; e nella equazione della circuitazione di E è assente un equivalente della corrente che si trova nella circuitazione di B.

Tuttavia le asimmetrie sono riconducibili alla presenza di monopoli elettrici in natura a differenza di quelli magnetici, i quali non esistono per l’elettromagnetismo classico.

Nel 1931 il fisico inglese Paul A. Dirac avanzò una nuova previsione su basi puramente teoriche: quella della possibile esistenza dei monopoli magnetici. È noto fin dall'antichità che i poli di un magnete non possono venire separati: i primi sperimentatori osservarono che, se si divide un magnete, i suoi frammenti sono altrettanti magneti completi, ciascuno con due poli.
Dirac affrontò il problema combinando le leggi dell'elettrodinamica classica con quelle della meccanica quantistica, trovando non solo che il monopolo magnetico può esistere, ma anche che la sua esistenza è strettamente legata a un'altra proprietà fondamentale della materia: la quantizzazione della carica elettrica. In tal modo rese le equazioni totalmente simmetriche.

Uno dei sistemi più promettenti per ottenere la conferma sperimentale dell’esistenza dei monopoli magnetici è il condensato di Bose-Einstein (BEC), cioè un insieme di atomi o altre particelle a spin intero, denominate bosoni, portati a temperature vicinissime allo zero assoluto. In un lavoro teorico pubblicato nel 2009 sulle “Physical Review Letters” Pietilä e Möttönen del Politecnico di Helsinki aveva indirizzato verso una prova sperimentale, la quale è stata verificata in laboratorio da Hall e colleghi, usando un BEC composto da atomi di rubidio immerso in un campo magnetico prodotto da quattro diverse serie di bobine. L'osservazione diretta dei vortici degli spin previsti per via teorica così ottenuta conferma sperimentalmente l'esistenza dei monopoli magnetici di Dirac. Tuttavia le ricerche e gli esperimenti sull’esistenza dei monopoli magnetici sono ancora tutt’oggi aperte.

L’aggiunta del termine mancante alla legge di Ampère-Maxwell rende simmetrici il campo elettrico e quello magnetico nel tempo. Un campo magnetico variabile genera un campo elettrico (legge Faraday - Lenz) e un campo elettrico variabile genera un campo magnetico. I due comportamenti non sono identici: nella legge Faraday-Lenz, infatti, compare il segno “– “mentre in quella di Ampère-Maxwell il segno “+ “. Dato che le due circuitazioni sono diverse da zero, i due campi non sono conservativi.

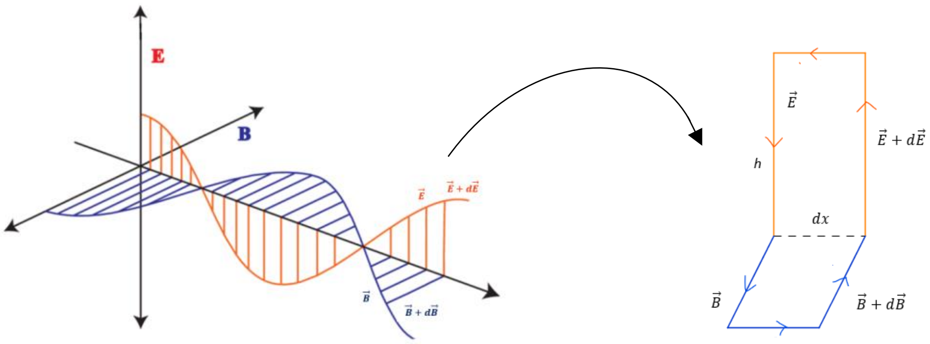
Una delle caratteristiche fondamentali delle equazioni di Maxwell è che esse prevedono esiti che saranno tra i presupposti della relatività di Einstein, perché, a differenza delle equazioni della meccanica newtoniana, godono della simmetria relativistica, cioè sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz dei sistemi di riferimento mentre non sono invarianti per le trasformazioni di Galilei. Ciò può essere reso evidente introducendo un oggetto matematico chiamato tensore (una generalizzazione dei vettori ordinari), che incorpora il campo elettrico e il campo magnetico. Scritte in termini di tensori, le equazioni di Maxwell assumono una forma particolarmente compatta e soprattutto simmetrica a colpo d’occhio.

- **VELOCITÀ’ DELLA LUCE NEL VUOTO**

Attorno al 1870 Maxwell fu in grado di prevedere l’esistenza di un fenomeno allora sconosciuto: le onde elettromagnetiche. Un’onda elettromagnetica è data dalla oscillazione in fase su piani perpendicolari di un campo elettrico E e di un campo magnetico B.
Da questa supposizione Maxwell, utilizzando la legge di Faraday-Lenz (terza equazione di Maxwell) e il teorema di Ampère-Maxwell (quarta equazione di Maxwell), riuscì a calcolare la velocità della luce nel vuoto e a dimostrare che la luce è un’onda elettromagnetica.

Le equazioni del campo elettrico e del campo magnetico sono date da:

$E = E_m\, sen(kx - \omega t) \qquad B = B_m\, sen(kx - \omega t)$



Considero la linea con corrispondente superficie per applicare la terza e la quarta equazione di Maxwell. La linea andrà a delimitare due rettangoli ortogonali tra loro.

- <u>TERZA EQUAZIONE</u>

$$C(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Calcolo della circuitazione: $C(\vec{E}) = (E + dE)h - Eh = hdE$. Su tutti gli altri lati il campo elettrico è perpendicolare allo spostamento ($\vec{E} \perp l$).

Ora calcolo il flusso di B riguardante un solo rettangolo: $\phi_B = Bh\,dx$ poiché il flusso è massimo quando il campo magnetico è perpendicolare allo spostamento mentre è nullo se sono paralleli.

Calcolando ora la derivata del flusso del campo magnetico otteniamo: $\frac{d\phi_B}{d_t} = hdx\frac{dB}{dt}$

Sostituisco i valori trovati all'interno della Terza Equazione: $hdE = -hdx\frac{dB}{d_t} \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}$

Il risultato ottenuto sono due derivate parziali e vengono scritte più correttamente in questo modo $\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{x}} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{t}}$ essendo E e B funzioni di due variabili.

Calcolando le derivate di E rispetto alla x e di B rispetto al tempo:

$$E_m \cos(kx - \omega t) \cdot k = -B_m \cos(kx - \omega t) \cdot (-\omega)$$

$$E_m \cdot k = B_m \cdot \omega \quad \rightarrow \quad \frac{E_m}{B_m} = \frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = c \quad (1)$$

Infatti: $\omega = \frac{2\pi}{T}, k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = c$

- <u>QUARTA EQUAZIONE</u>

$$C(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

Calcolo la circuitazione di B sulla linea l: $C(\vec{B}) = Bh - (B + dB)h = -hdB$. Su tutti gli altri lati il campo elettrico è perpendicolare allo spostamento ($\vec{B} \perp l$).

Ora calcolo il flusso di E riguardante un solo rettangolo: $\phi_E = Eh\,dx$ poiché il flusso è massimo quando il campo elettrico è perpendicolare allo spostamento mentre è nullo se sono paralleli.

Calcolando ora la derivata del flusso del campo elettrico otteniamo: $\frac{d\phi_E}{d_t} = hdx\frac{dE}{dt}$

Sostituisco i valori trovati all'interno della Quarta Equazione: $-hdB = \varepsilon_0 \mu_0\, hdx\frac{dE}{dt} \quad \rightarrow \quad -\frac{dB}{dx} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{dE}{dt}$

Il risultato ottenuto sono due derivate parziali e vengono scritte più correttamente in questo modo

$-\frac{\partial B}{\partial x} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}$ essendo E e B funzioni di due variabili.

Calcolando le derivate di B rispetto alla x e di E rispetto al tempo:

$- B_m \, cos(kx - \omega t) \cdot k = \varepsilon_0\mu_0 \, E_m \, cos(kx - \omega t) \cdot (-\omega)$

$B_m \cdot k = \varepsilon_0\mu_0 E_m \cdot \omega \quad \rightarrow \quad \frac{E_m}{B_m} = \frac{E}{B} = \frac{k}{\varepsilon_0\mu_0\omega} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\frac{\omega}{k}} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 c} \quad (2)$

Le due soluzioni trovate (1) e (2) devono essere uguali: $c = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 c} \rightarrow \ c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \ \rightarrow \ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

Sostituendo a $\varepsilon_0 \ e \ \mu_0$ i valori noti si ottiene $c \sim 3 \cdot 10^8 \ m/s$

- **CONSEGUENZE**

Attraverso le equazioni di Maxwell si era potuto dimostrare come la luce fosse un fenomeno ondulatorio. In analogia con le onde sonore anche le onde elettromagnetiche necessitavano di un mezzo per potersi propagare, venne così ipotizzata l'esistenza dell'etere.
Il problema dell'etere, da allora, era di nuovo al centro di studi teorici e sperimentali di fisici e matematici (Lorentz, Fitzgerald, Poincarè…), nonostante le proprietà attribuibili all'etere fossero alquanto assurde e in contraddizione tra loro (perfettamente rigido, ma anche elastico, perfettamente trasparente e con densità nulla). Fisici sperimentali come Michelson furono impegnati in misure che evidenziassero il moto relativo della Terra e dell'etere. Egli, insieme a Morley, progettò un interferometro che poteva essere adatto a misurare il vento d'etere prodotto dalla Terra nel suo movimento attraverso l'etere immobile. Tuttavia l'esperimento fallì, e ne risultò come spiegazione, la stessa che prese Einstein, che l'etere non esiste.

Per questo motivo la scoperta della luce come onda elettromagnetica influenzerà la nascita della Relatività Ristretta. Uno dei due postulati si basa proprio sul principio di costanza della velocità della luce e dichiara come essa sia indipendente dal moto relativo della sorgente e dell'osservatore, e sia indipendente dalla direzione in cui si propaga. Essa costituisce un valore limite non superabile da corpi dotati di massa.

Le conseguenze delle equazioni hanno cambiato completamente l'evoluzione non soltanto della fisica, ma anche della vita di tutti i giorni. Nel '95, cioè dopo appena sette anni dalla dimostrazione dell'esistenza delle onde elettromagnetiche, Marconi faceva le sue esperienze di telegrafia senza fili.

E ogni giorno a partire da ventilatori, asciugacapelli, rasoi elettrici, forni a microonde, dai principali elettrodomestici fino ai più grandi generatori di energia elettrica, utilizziamo le applicazioni pratiche della terza e della quarta equazione di Maxwell.

- **CONCETTO DI CONTINUITA'**

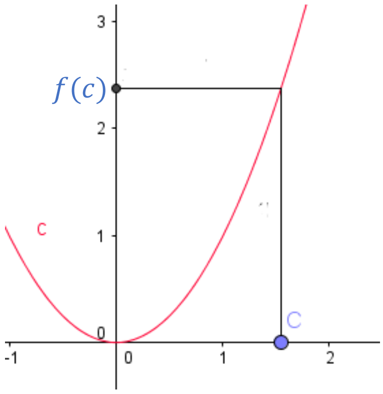
Maxwell introdusse i campi per ragioni inizialmente matematiche per aver funzioni continue che potessero essere derivate e integrate. Oggi si sa che il campo è un ente fisico reale, che trasporta quantità di moto ed energia e non è solo uno strumento matematico.
L'introduzione del concetto di campo risolve il problema, nato dopo la legge gravitazionale di Newton, dell'esistenza di interazioni a distanza tra corpi separati da vuoto. Due corpi interagendo tra loro generano dei campi che trasportano l'azione da punto a punto vicino e da istante a istante vicino per cui essi sono continui sia rispetto allo spazio sia rispetto al tempo.

Una funzione si dice continua in $x = c$ se $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ oppure se $\lim_{h\to 0} f(c + h) = f(c)$.

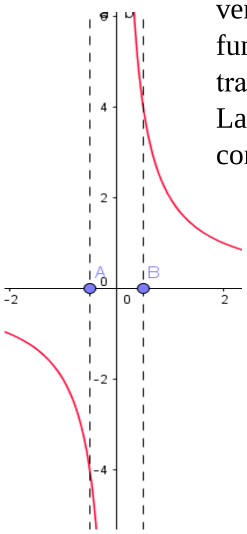
Ciò significa innanzitutto che la funzione è calcolabile in c, quindi c appartiene al campo di esistenza della funzione. Il limite coincide con il valore della funzione nel punto, quindi, sia da sinistra sia da destra, il grafico della funzione tende allo stesso valore f (c). Possiamo dire, in termini non matematici, che il grafico di una funzione è continua quando non presenta buchi, salti o interruzioni.

Applicando la definizione di limite: $\forall\varepsilon > 0 \; \exists \, \delta(\varepsilon) / \forall x \, , |x-c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

Quindi in un intorno di c: $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$
Quindi una funzione continua manda punti vicini in punti vicini: punti vicini a c sull'asse x corrispondono tramite f, a punti vicini a f(c) sull'asse y.



Controesempio: Punti vicini al punto x = 0 vengono mandati dalla funzione in punti lontani tra loro sull'asse y.
La funzione non è continua in x = 0.



- **CRITERIO DI CONTINUITA'**

Una funzione $y = f(x)$ è continua in $x = c$ se:

$$\begin{cases} \exists f(c) \\ \exists \lim_{x\to c^-} f(x), \; \exists \lim_{x \to c^+} f(x) \\ \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c) \end{cases}$$

- **CRITERIO DI DERIVABILIA'**

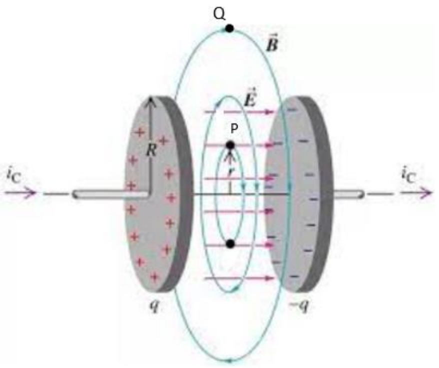
Una funzione può essere derivabile se e solo se essa è continua.

$$\lim_{x\to c^-} f'(x) = \lim_{x\to c^+} f'(x) = f'(c)$$

- **ESEMPI DI APPLICAZIONE DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL**

All'interno dell'elettromagnetismo possiamo trovare diversi esempi matematici di continuità e di derivabilità, tra cui i grafici delle funzioni del campo magnetico indotto in un condensatore e il campo elettrico indotto in un solenoide.

A. CAMPO MAGNETICO INDOTTO IN UN CONDENSATORE con $\frac{dE}{dt} = k > 0$



$$C(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

1. Considero la circonferenza parallela alle armature del condensatore con raggio uguale alla distanza di P dall'asse del condensatore $\rightarrow r \leq R$

$$C(\vec{B}) = \vec{B} \cdot 2\pi r$$

$$\phi_E = \vec{E} \cdot S = \vec{E} \cdot \pi r^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d\phi_E}{dt} = \pi r^2 \cdot \frac{dE}{dt} = \pi r^2 k$$

$$C(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{B} \cdot 2\pi r = \varepsilon_0 \mu_0 \pi r^2 k \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 k}{2}\right) \cdot r$$

Quindi, per $r \leq R$, il campo magnetico $\vec{B}$ è direttamente proporzionale a r, il campo magnetico va da zero a un massimo, che si trova quando $r = R \quad \rightarrow \quad Bmax = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 kR}{2}$.

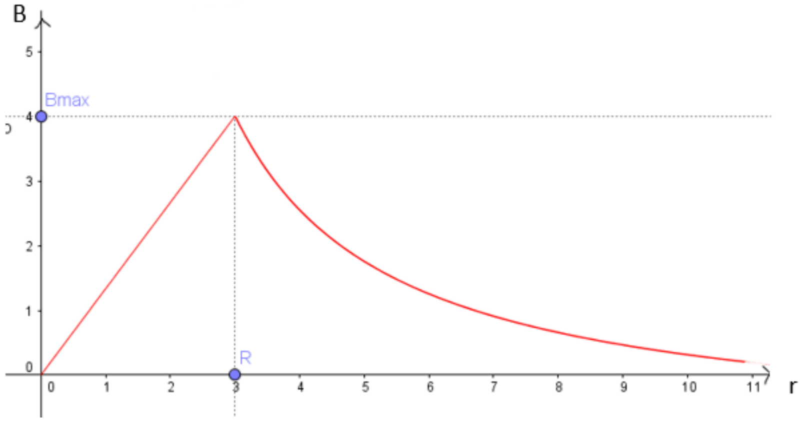
2. Ora considero la circonferenza parallela alle armature del condensatore con raggio uguale alla distanza di Q dall'asse del condensatore $\rightarrow r > R$

$$C(\vec{B}) = \vec{B} \cdot 2\pi r$$

$$\phi_E = \vec{E} \cdot S = \vec{E} \cdot \pi R^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d\phi_E}{dt} = \pi R^2 \cdot \frac{dE}{dt} = \pi R^2 k$$

$$C(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{B} \cdot 2\pi r = \varepsilon_0 \mu_0 \pi R^2 k \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2 k}{2}\right) \cdot \frac{1}{r}$$

Quindi, per $r > R$, il campo magnetico $\vec{B}$ è inversamente proporzionale a r.



Continuità della funzione: $\lim_{r \to R^-} \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 k}{2}\right) \cdot r = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 Rk}{2}$

$$\lim_{r \to R^+} \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2 k}{2}\right) \cdot \frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 Rk}{2}$$

I due limiti sono uguali, per cui la funzione che descrive il campo magnetico indotto in un condensatore è continua.

Derivabilità della funzione:

$$r \leq R \ \rightarrow \ y = \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 k}{2}\right) \cdot r \quad \rightarrow \quad y' = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 k}{2}$$

$$r > R \ \rightarrow \ y = \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2 k}{2}\right) \cdot \frac{1}{r} \quad \rightarrow \quad y' = \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2 k}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right)$$

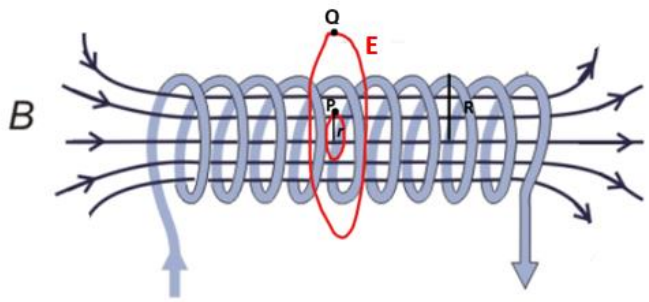
$$\lim_{r \to R^-} \frac{\varepsilon_0 \mu_0 k}{2} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0 k}{2}$$

$$\lim_{r \to R^+} \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0 R^2 k}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0 k}{2}$$

Si può dunque notare come nel punto (R, Bmax) vi sia un punto angoloso poiché il limite nell'intorno sinistro di R vale $\frac{\varepsilon_0\mu_0 k}{2}$ mentre il limite nell'intorno destro vale $-\frac{\varepsilon_0\mu_0 k}{2}$.

Possiamo verificare nel grafico come per $r \leq R$ la derivata y' è un numero: la derivata indica il coefficiente angolare della retta poiché la tangente coincide con la retta stessa.

B. CAMPO ELETTRICO INDOTTO IN UN SOLENOIDE con $\frac{dB}{dt} = k > 0$



$$C(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

1. Considero la circonferenza parallela alle spire del solenoide con raggio uguale alla distanza di P dall'asse del condensatore $\rightarrow r \leq R$

$$C(\vec{E}) = \vec{E} \cdot 2\pi r$$

$$\phi_B = \vec{B} \cdot S = \vec{B} \cdot \pi r^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d\phi_B}{dt} = \pi r^2 \cdot \frac{dB}{dt} = \pi r^2 k$$

$$C(\vec{E}) = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{E} \cdot 2\pi r = |-\pi r^2 k| \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \left(\frac{k}{2}\right) \cdot r$$

Quindi, per $r \leq R$, il campo magnetico $\vec{E}$ è direttamente proporzionale a r, il campo elettrico va da zero a un massimo, che si trova quando $r = R \quad \rightarrow \quad Emax = \frac{kR}{2}$.

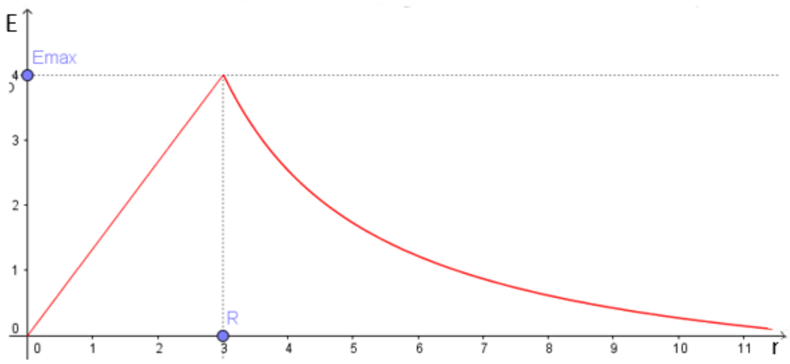
2. Ora considero la circonferenza parallela alle spire del solenoide con raggio uguale alla distanza di Q dall'asse del condensatore $\rightarrow r > R$

$$C(\vec{E}) = \vec{E} \cdot 2\pi r$$

$$\phi_B = \vec{B} \cdot S = \vec{B} \cdot \pi R^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d\phi_B}{dt} = \pi R^2 \cdot \frac{dB}{dt} = \pi R^2 k$$

$$C(\vec{E}) = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{E} \cdot 2\pi r = |-\pi R^2 k| \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \left(\frac{k \cdot R^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{r}$$

Quindi, per $r > R$, il campo magnetico $\vec{E}$ è inversamente proporzionale a r.



<u>Continuità della funzione</u>: $\lim_{r \to R^-} \left(\frac{k}{2}\right) \cdot r \ = \ \frac{Rk}{2}$

$$\lim_{r \to R^+} \left(\frac{kR^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{r} = \ \frac{Rk}{2}$$

I due limiti sono uguali, per cui la funzione che descrive il campo elettrico indotto in un solenoide è continua.

<u>Derivabilità della funzione:</u>

$$r \leq R \ \rightarrow \ \ y = \left(\frac{k}{2}\right) \cdot r \ \ \ \rightarrow \ \ \ y' = \ \frac{k}{2}$$

$$r > R \ \rightarrow \ \ y = \ \left(\frac{k\,R^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{r} \ \ \ \rightarrow \ \ y' = \left(\frac{R^2 k}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\lim_{r \to R^-} \frac{k}{2} \ = \ \ \frac{k}{2}$$

$$\lim_{r \to R^+} \left(\frac{k\,R^2}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = \ -\frac{k}{2}$$

Si può dunque notare come nel punto (R, Emax) vi sia un punto angoloso poiché il limite nell'intorno sinistro di R vale $\frac{k}{2}$ mentre il limite nell'intorno destro di R vale $-\frac{k}{2}$.

Possiamo verificare nel grafico come per $r \leq R$ la derivata y' è un numero: la derivata indica il coefficiente angolare della retta poiché la tangente coincide con la retta stessa.

- **BIBBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA:**

Testo:

- https://moterma.altervista.org/Tesina/Fisica.html
- https://www.lescienze.it/news/2014/01/30/news/monopolo_magnetico_dirac_conferma_sperimentale-1989090/
- http://www.cartesio-episteme.net/episteme/epi6/ep6-maxw.htm
- http://www.psychomedia.it/pm/science/psybyo/bertagnolio2.htm

- Libro di testo: 3 FISICA Modelli teorici e problem solving, Elettromagnetismo Fisica moderna, James S. Walker, linx Pearson.

- Schede fornite dalla professoressa De Bernardi: *FORZE_E_CAMPI_prof.Barone*, *Maxwell-nota_storica*, *Eq.Maxwell*, *funzioni_continue*.

Immagini:

- Scheda fornita dalla professoressa De Bernardi: *Maxwell-nota_storica*
- *http://www.maniericopernico.it/wp-content/uploads/2017/03/Il-Campo-Elettrico-ed-il-Potenziale.pdf*
- *https://www.gigiboscaino.it/web/wp-content/uploads/2018/03/magnetismo.pdf*
- *https://it.openprof.com/ge/images/179/2.jpg*

Grafici:

- GeoGebra

COMMISSARI: Fabrizia De Bernardi