Geometria e gravità.

Si immagini una coppia di fisici "bidimensionali" (tipo i "fantasmi dello schermo"), che riescono a comprendere la lunghezza e la larghezza ma non l'altezza. Questi fisici operano in un mondo che per loro è un "piano". Si supponga che essi si trovino sulla superficie della Terra all'Equatore, uno a Pontianak (0.02 S, 109.20 E) e l'altro a Samarinda (0.30 S, 117.09E), città site entrambe in Indonesia (Kalimantan-Borneo). Partono per un viaggio che li porta verso nord lungo percorsi paralleli. Dopo avere coperto un certo tratto d scoprono che la loro distanza s è minore di quando sono partiti (circa 878 km). Concludono che sono stati attratti l'uno verso l'altro da qualche <<forza>> e a questa <<forza>> danno un nome: "gravità".

Ma, naturalmente, non esiste alcuna <<forza>>: i fisici sono stati ingannati dal fatto che la loro geometria è "curva", mentre essi, per descrivere la loro posizione, si sono serviti della geometria euclidea piana. Lo stesso accade per il nostro mondo reale. Se si sostiene che l'Universo è descritto dalla geometria euclidea, allora esiste una forza misteriosa - la gravità - che non trova alcuna spiegazione fondamentale. Ma nella relatività generale tutti gli effetti della gravità sono dovuti alla natura non euclidea della geometria (una geometria dello spazio-tempo quadridimensionale) dell'Universo. La presenza di materia distorce la geometria e si manifesta sotto forma di << forza gravitazionale >>.

Come abbiamo detto in precedenza, la curvatura dello spazio-tempo fa riferimento alla "curvatura totale (o gaussiana)" di una superficie, $K = \frac{1}{R_1 R_2}$, dove R_1ed R_2 sono i due "raggi principali di curvatura".

Seguendo **Eugenio Beltrami** (1835 - 1900) si sostituisca al concetto di retta nel piano quello di "geodetica" della superficie (la linea di minima distanza fra due punti) e al concetto di movimento quello di "applicabilità" per flessione "di una regione su di un'altra; si considerino poi le superficie a curvatura totale (o gaussiana) "costante".

A seconda del valore di K, possono darsi tre casi:

1. $K = 0$: si ha la geometria delle superficie applicabili sul piano (cilindrica, conica). Si dimostra che in tal caso da un punto si può condurre una sola geodetica che non incontri una geodetica assegnata e di conseguenza che la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è due retti. È detta "geometria parabolica" e coincide con l'ordinaria geometria euclidea del piano.
2. $K < 0$: si ha la geometria delle superficie applicabili sulla "pseudosfèra", che è la superficie che si ottiene facendo ruotare una "trattrice" ("tractoria") attorno al suo asintoto: e la trattrice può definirsi come quella curva piana in ogni punto della quale il segmento di tangente compreso tra il punto di contatto e una data retta r complanare alla curva, ha una lunghezza costante $R = \frac{1}{\sqrt{|K|}}$; la retta è l'unico asintoto della curva. Un metodo pratico per ottenere una trattrice è quello di porre la ruota anteriore di una bicicletta sull'asse delle x e quela posteriore sull'asse delle y; mentre la ruota anteriore si muove lungo l'asse delle x, la ruota posteriore descriverà la trattrice. La pseudosfèra, generata dalla rotazione di detta curva attorno all'asse delle x, avrà la forma di due trombe ("chiarine") infinitamente allungate, saldate insieme all'estremità dei loro padiglioni [ovvero sarà una specie di "doppio calice" che va all'infinito in alto e in basso]. Si dimostra che sulle superficie applicabili sulla pseudosfèra da un punto si possono condurre due geodetiche parallele ad una

geodetica assegnata e quindi che la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è minore di due retti. È detta “geometria iperbolica” e corrisponde alla geometria di **Nikolaj Ivanovič Lobačevskij** (1793 - 1856) e János Bolyai (1802 - 1860) del piano [modelli di **Felix Klein** (1849 - 1925) e di **Jules-Henri Poincaré** (1854 - 1912)].

3. $K > 0$: si ha la geometria delle superficie applicabili su una sfera di raggio $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$. Su di esse si dimostra che da un punto non si può condurre nessuna parallela ad una geodetica assegnata (l’arco di cerchio massimo che unisce due punti dalla superficie sferica) e che quindi la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è maggiore di due retti (e minore di sei retti). Su una sfera esistono dei triangoli trirettangoli. È detta “geometria ellittica” o di Bernhard Riemann (1826 - 1866) ed è valida sulla sfera e sulle superficie su di essa applicabili. Inoltre, il teorema di Pitagora, il << gioiello >> della geometria di Euclide, non è più valido per le altre geometrie.

***

Qual è allora la geometria del nostro Universo?
Lo schema originale di Einstein è quello di un “Universo sferico” e meccanicamente statico, che non dà adito a possibili espansioni o contrazioni; ma il matematico russo **A. Friedman** fece notare che la natura statica dell’Universo di Einstein era il risultato di un errore algebrico (in sostanza, una divisione per zero) commesso nel processo di derivazione. Friedman arrivò poi a dimostrare che una oculata revisione delle equazioni - base di Einstein portava proprio a una classe di universi che si espandono e si contraggono. In particolare l’”Universo sferico” originariamente concepito da Einstein, si dimostrò dinamicamente instabile, pronto a contrarsi o ad espandersi alla minima provocazione.
Questo sembra il momento giusto di porre a noi stessi una domanda sulla misura complessiva dell’Universo. È finito, con un volume di $\sim 10^{31}$anni-luce cubi, come postulò una volta Einstein? o viceversa si estende senza limiti in tutte le direzioni, come ce lo raffiguravamo con la vecchia geometria del buon Euclide? La Relatività Generale porta a due possibili alternative matematiche.
La prima possibilità è che lo spazio dell’Universo “si curvi in dentro” allo stesso modo della superficie della Terra (K > 0) e che alla fine si richiuda su se stesso in un “punto agli antipodi”. Questo sarebbe l’Universo chiuso (finito ed illimitato) di Einstein, che può essere sia statico sia in espansione. Un’astronave che viaggiasse in questo Universo, seguendo un percorso il più possibile diritto, alla fine tornerebbe a casa. La seconda alternativa sarebbe che l’Universo “si curvi in fuori”, come la superficie di una sella alla cow-boy (K < 0).
Soltanto l’osservazione potrà decidere quale di queste due possibili forme (la finita o l’infinita) sia giusto attribuire al nostro Universo.