Massimi e minimi assoluti per via elementare
di Antonino Giambò

1. In un recente articolo pubblicato su questa medesima rubrica, Luigi Verolino ha mostrato alcuni interessanti esempi in cui il massimo (o il minimo) di particolari funzioni può essere determinato senza coinvolgere le derivate.

L'articolo mi offre il destro per ricordare che esistono metodi generali "elementari" per il calcolo del massimo o del minimo assoluti di una funzione. Sono denominati "elementari" perché non sono coinvolte le derivate. Il che non significa, però, che la risoluzione dei problemi con questi metodi sia più facile che con l'uso delle derivate. Significa *sic et simpliciter* che non sono coinvolte le derivate.

L'argomento è noto, ma lo voglio riprendere ugualmente a beneficio soprattutto di quegli studenti che avessero interesse a conoscenze più ampie di quelle che acquisiscono a scuola, in particolare se si tratta di studenti che intendono intraprendere studi universitari in settori in cui la Matematica è disciplina fondamentale.

Premetto che le proprietà di cui ci occuperemo sono abbastanza semplici negli enunciati, un po' meno nelle dimostrazioni.

2. Enuncio prima di tutto i teoremi (sono in numero di quattro) che esprimono le proprietà su accennate.

TEOREMA 1. *Se n numeri reali positivi variano in modo che la loro somma si mantenga costante allora il loro prodotto risulta massimo quando essi assumono valori uguali fra loro.*

TEOREMA 2. *Se n numeri reali positivi variano in modo che il loro prodotto si mantenga costante allora la loro somma risulta minima quando essi assumono valori uguali fra loro.*

TEOREMA 3. *Se n numeri reali positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$ variano in modo che la loro somma si mantenga costante allora il prodotto*
$$x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots \cdot x_n^{r_n},$$
dove $r_1, r_2, \dots, r_n$ sono numeri razionali positivi, è massimo quando risulta:
$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \cdots = \frac{x_n}{r_n}.$$

TEOREMA 4. *Se n numeri reali positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$ variano in modo che si mantenga costante il prodotto*
$$x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots \cdot x_n^{r_n},$$
dove $r_1, r_2, \dots, r_n$ sono numeri razionali positivi, allora la loro somma è minima quando risulta:
$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \cdots = \frac{x_n}{r_n}.$$

3. Come immediata conseguenza del teorema 1 si dimostra che:

Fra i rettangoli di uguale perimetro il quadrato è quello di area massima.

E come immediata conseguenza del teorema 2 si dimostra che:

Fra i rettangoli di uguale area il quadrato è quello di perimetro minimo.

Vediamo adesso qualche problema più complesso.

PROBLEMA 1. *Un parallelepipedo retto di altezza nota h ha per base un rettangolo, la cui diagonale ha una lunghezza nota d. Calcolare le dimensioni della base per le quali il parallelepipedo ha volume massimo.*

RISOLUZIONE. Indicate con x, y le dimensioni della base del parallelepipedo, in virtù del teorema di Pitagora risulta: $x^2 + y^2 = d^2$. Ora, il volume del parallelepipedo generico è $V = xyh$ ed è evidente che è massimo quando è massimo il prodotto xy, o anche quando è massima la funzione $(xy)^2 = x^2y^2$. Costatato che la somma delle due variabili x^2 e y^2 è la costante d^2, in virtù del teorema 1 il loro prodotto (e quindi anche il volume del parallelepipedo) è massimo quando si ha $x^2 = y^2$, ossia: $x = y = d/\sqrt{2}$. Il volume massimo è pertanto:
$$\max(V) = \frac{d^2h}{2}.$$

PROBLEMA 2. *Fra i triangoli aventi lo stesso perimetro trovare quello di area massima.*

RISOLUZIONE. Siano x, y, z le lunghezze dei lati di un triangolo di perimetro costante, che per comodità indichiamo con $2p$. In virtù della formula d Erone l'area del triangolo è: $A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, ed è evidente che essa risulta massima quando lo è il prodotto: $(p-x)(p-y)(p-z)$.

Ora, siccome: $(p-x)+(p-y)+(p-z) = 3p-2p = p$, il prodotto suddetto, per il teorema 1, è massimo quando risulta: $p-x = p-y = p-z$. Ossia quando $x = y = z$, e perciò quando il triangolo è equilatero. L'area massima è pertanto:

$$\max(A) = \sqrt{p \cdot \left(p - \frac{2p}{3}\right)^3} = \frac{p^2\sqrt{3}}{9}.$$

PROBLEMA 3. *È data la funzione*:

$$f(x) = a\,x + \frac{b}{x},$$

dove a, b sono costanti positive. Trovare il suo valore minimo per $x > 0$.

RISOLUZIONE. Si costata che, per $x > 0$, i due termini ax e b/x sono positivi ed il loro prodotto è la costante ab. Ragion per cui, in virtù del teorema 2, la funzione $f(x)$ è minima quando quei due termini sono uguali, ossia quando è soddisfatta la seguente relazione:

$$a\,x = \frac{b}{x}\,,\quad \text{vale a dire}:\ x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Il valore minimo della funzione è pertanto:

$$\min f(x) = a\sqrt{\frac{b}{a}} + b\sqrt{\frac{a}{b}} = 2\sqrt{a\,b}\,.$$

PROBLEMA 4. *Considerata la funzione reale di variabile reale* $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{(1-x)^3}$, *trovare il suo valore massimo nell'intervallo* $[0,1]$.

RISOLUZIONE. La funzione può essere messa nella forma seguente: $f(x) = x^2 \cdot (1-x)^{3/2}$.

Ora, per $0 < x < 1$, le due variabili x e $1-x$ sono entrambe positive e la loro somma è uguale ad 1 e perciò è costante. In virtù del teorema 3 si ha pertanto che il prodotto $x^2 \cdot (1-x)^{3/2}$ è massimo quando si ha:

$$\frac{x}{2} = \frac{1-x}{3/2} \quad \text{ossia quando } x = \frac{4}{7}.$$

Risulta ora:

$$f\left(\frac{4}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \sqrt{\left(1-\frac{4}{7}\right)^3} = \frac{48\sqrt{21}}{2.401}.$$

Per stabilire se questo valore è il massimo della funzione $f(x)$ bisogna confrontarlo con i valori che essa assume agli estremi dell'intervallo in cui è definita, ovvero nei punti 0 e 1. Siccome $f(0) = f(1) = 0$, possiamo concludere che effettivamente $f(4/7)$ è il massimo cercato.

PROBLEMA 5. *Fra i contenitori di forma cilindrica aventi volume* $1728\,\pi\ cm^3$, *aperti superiormente, trovare quello per cui è minima la somma della superficie laterale con la superficie della base.*

RISOLUZIONE. Indicati con x il raggio di base del contenitore cilindrico e con y la sua altezza, il volume è $V = \pi x^2 y$ e la somma della superficie laterale con quella della base (una sola evidentemente, giacché la parte superiore del contenitore è aperta) è $S = 2\pi xy + \pi x^2$.

Si tratta di stabilire quando S è minima sapendo che V è costante. Ora, essendo $S = \pi(2xy + x^2)$, è evidente che S è minima quando lo è la quantità $2xy + x^2$. D'altro canto, siccome V è costante, lo sono anche la quantità $x^2 y$ e il quadruplo del suo quadrato, ossia la quantità $4(x^2y)^2$. Siccome quest'ultima quantità si può scrivere in questo modo: $(2xy)^2\ (x^2)$, per il teorema 4 la somma $2xy + x^2$ è minima quando è soddisfatta la seguente relazione:

$$\frac{2xy}{2} = \frac{x^2}{1} \quad \text{ossia quando } x = y, \ \text{.essendo } x \neq 0$$

Siccome $V = 1728\,\pi\,cm^3$, deve essere soddisfatta la seguente equazione: $\pi\,x^3 = 1728\,\pi$, da cui si ricava $x = 12\ (cm)$. Il contenitore cercato è quello che ha uguali a $12\ cm$ sia il raggio di base sia l'altezza.

PROBLEMA 6. *Siano x, y due variabili positive il cui prodotto sia uguale a* 16. *Trovare il valore minimo della somma* $x^3 + 3y$.

RISOLUZIONE. Osserviamo che si può scrivere:

$$x^3 + 3y = x^3 + y + y + y$$

e che il prodotto di questi 4 termini vale: $x^3 \cdot y \cdot y \cdot y = (xy)^3 = 16^3$, e quindi è costante. Questo significa, in virtù del teorema 2, che la somma dei quattro termini, ovvero la quantità $x^3 + 3y$ è minima quando $x^3 = y$.

D'altro canto, essendo $xy = 16$, si ha: $y = 16/x$. Pertanto deve essere:

$$x^3 = \frac{16}{x} \quad \text{da cui segue: } \ x = 2 \ \text{ e quindi } \ y = 8 \ \text{ e } \ x^3 + 3y = 32\,.$$

In conclusione, la somma in questione assume il valore minimo, uguale a 32, per $x = 2$ e $y = 8$.

PROBLEMA 7. Per concludere con questa teoria di problemi, riprendo la seguente questione trattata da Verolino per mostrare come si possa risolvere con le proprietà elementari:

Trovare il massimo della funzione:

$$y = \frac{x}{(x+1)^2} \quad \text{con} \quad x \geq 0.$$

RISOLUZIONE. Anzitutto è necessario un cambiamento di prospettiva. Precisamente, escludendo provvisoriamente il valore $x = 0$, occorre costatare che, per $x > 0$, la funzione $y(x)$ è massima quando è minima la funzione reciproca:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x} \quad \text{ossia} \quad f(x) = x + \frac{1}{x} + 2.$$

Ora, chiaramente, per $x > 0$ questa funzione è minima quando lo è la somma $x + 1/x$.

Costatato che il prodotto delle due variabili positive x e $1/x$ è costante ($= 1$), dobbiamo concludere, in virtù del teorema 2, che la somma precedente è minima quando risulta $x = 1/x$, vale a dire quando $x = 1$.

Per questo valore di x risulta $y(x) = 1/4$. Per stabilire se questo è il valore massimo di $y(x)$, per $x \geq 0$, dobbiamo confrontarlo con il valore che $y(x)$ assume per quel valore, $x = 0$, che inizialmente abbiamo escluso. Siccome $y(0) = 0$, possiamo senz'altro concludere che per $x \geq 0$ la funzione $y(x)$ è massima quando $x = 1$, nel qual caso, come già detto, $y(x) = 1/4$.

OSSERVAZIONE. Non vorrei aver dato l'impressione che i metodi elementari possano risolvere tutti i problemi di ricerca del massimo o del minimo assoluti di una funzione. Non è così. Anzi, le funzioni che si riescono a massimizzare o minimizzare con tali metodi sono una piccolissima parte e per lo più si ricorre alle derivate. Il metodo di ricerca del massimo e/o del minimo di una funzione con le derivate rimane dunque il metodo più importante. Sapere, tuttavia, che in qualche caso i metodi elementari sono efficaci può far comodo.

E poi, di metodi cosiddetti elementari non ci sono solamente quelli dei quali ci siamo qui occupati. Verolino ne ha mostrato qualche altro esempio nell'articolo succitato. Ne esistono addirittura fin dal tempo degli antichi Greci, soprattutto di tipo geometrico, ma di questi non ci occupiamo in questa sede.

4. Passiamo adesso alle dimostrazioni dei 4 teoremi.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. Consideriamo n numeri reali positivi che assumano valori variabili ma tali che la loro somma si mantenga uguale ad una quantità costante, che per comodità indichiamo con ns. Vogliamo dimostrare che il loro prodotto è massimo quando gli n numeri sono uguali fra loro e perciò uguali ad s, Cosicché il prodotto massimo è s^n.

A tal fine supponiamo che le n variabili assumano i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, non tutti uguali ad s. Questo significa che se uno di tali valori, mettiamo x_1, è maggiore di s, ce n'è un altro, mettiamo x_2, che è minore di s. Per fissare le idee, sia:

$$x_1 = s + d_1 \,, \quad x_2 = s - d_2 \,,$$
dove d_1, d_2 sono numeri positivi.

Se ora, lasciando immutati gli $n-2$ valori $x_3, x_4, \dots, x_n$, sostituiamo al posto di x_1 ed x_2 nell'ordine i valori s e $x'_2 = s + (d_1 - d_2)$, gli n numeri diventano:
$$s, \;\; x'_2, \;\; x_3, \;\; x_4, \;\; \dots, \;\; x_n \,.$$
La somma di questi numeri continua ad essere ns, cosa che si può controllare agevolmente.

Il loro prodotto, invece, è aumentato, diventando maggiore di $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$, poiché $x_1 \cdot x_2 < s \cdot x'_2$. Infatti:
$$x_1 \cdot x_2 = (s + d_1) \cdot (s - d_2) = s^2 + s \cdot (d_1 - d_2) - d_1 \cdot d_2$$
e quindi:
$$x_1 \cdot x_2 < s^2 + s \cdot (d_1 - d_2) = s \cdot [s + (d_1 - d_2)] = s \cdot x'_2 \,.$$
Se, giunti a questo punto, si verificasse il caso che tutti gli n valori $s, \; x'_2, \; x_3, \; x_4, \; \dots \;, \; x_n$ fossero uguali fra loro e quindi uguali ad s, la dimostrazione sarebbe evidentemente conclusa. Supponiamo che questo non avvenga. Ciò significa che uno dei valori $x'_2, \; x_3, \; x_4, \; \dots \;, \; x_n$ è maggiore di s: supponiamo che sia x'_2. Chiaramente un altro valore, mettiamo x_3, è minore di s. Sia precisamente:
$$x'_2 = s + d_3 \,, \quad x_3 = s - d_4 \,,$$
dove d_3, d_4 sono numeri positivi.

Se, lasciando immutati gli $n-2$ valori $s, x_4, x_5, \dots, x_n$, sostituiamo al posto di x'_2 ed x_3 nell'ordine i valori s e $x'_3 = s + (d_3 - d_4)$, gli n numeri diventano:
$$s, \;\; s, \;\; x'_3, \;\; x_4, \;\; x_5, \;\; \dots, \;\; x_n \,.$$
La somma di questi numeri continua ad essere ns, mentre il prodotto aumenta, potendosi dimostrare, come prima, che è $x'_2 \cdot x_3 < s \cdot x'_3$.

Cosicché, eseguendo due volte lo stesso procedimento, otteniamo che gli n numeri variabili acquistino valori tali che almeno due di essi siano uguali ad s. Nello stesso tempo, mentre la loro somma si mantiene costante, il loro prodotto aumenta.

In questo modo, dopo aver eseguito il procedimento un numero complessivo di volte uguale o eventualmente minore di $n-2$, gli n numeri assumono i seguenti valori:
$$\underbrace{s, \;\; s, \;\; \dots \;, \;\; s}_{n-2 \text{ termini}}, \;\; x'_{n-1}, \;\; x_n \,,$$
la cui somma è rimasta uguale ad ns, mentre il loro prodotto è ancora aumentato.

A questo punto è chiaro che i due valori x'_{n-1} e x_n o sono entrambi uguali ad s o sono entrambi diversi da s. Nel primo caso la dimostrazione è conclusa. Nel secondo deve essere comunque $x'_{n-1} + x_n = 2s$ e, inoltre, uno dei due valori, supponiamo x'_{n-1}, è maggiore di s, mentre l'altro è minore. Sia precisamente:
$$x'_{n-1} = s + d \,, \quad x_n = s - d \,,$$
dove $d > 0$.

Se, finalmente, sostituiamo il valore s al posto di x'_{n-1} e di x_n, gli n numeri diventano tutti uguali ad s, per cui la loro somma continua ad essere ns, mentre il loro prodotto è ulteriormente aumentato – assumendo il valore s^n – poiché risulta $x'_{n-1} \cdot x_n < s \cdot s$. Infatti:
$$x'_{n-1} \cdot x_n = (s + d) \cdot (s - d) = s^2 - d^2 < s^2.$$
La dimostrazione del teorema 1 è così conclusa.

Questo è il teorema base. Gli altri tre sono ricondotti ad esso, in via diretta o indiretta.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2. Consideriamo n numeri reali positivi che assumano valori variabili ma tali che il loro prodotto si mantenga uguale ad una quantità costante, che per comodità indichiamo con p^n. Vogliamo dimostrare che la loro somma è minima quando gli n numeri sono uguali fra loro e perciò uguali a p, Cosicché la somma minima è np.

A tal fine supponiamo che le n variabili assumano i valori $x_1, x_2, \dots, x_n$, la cui somma indichiamo con s. Dopodiché consideriamo i seguenti numeri:

$$y_1 = \frac{x_1}{s}\ ,\quad y_2 = \frac{x_2}{s}\ ,\quad \dots\ ,\quad y_n = \frac{x_n}{s}\ .$$

La loro somma è:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \frac{x_1}{s} + \frac{x_2}{s} + \cdots + \frac{x_n}{s} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{s} = 1.$$

Perciò possiamo scrivere:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = n \cdot \frac{1}{n}.$$

Di modo che, in virtù del teorema 1, si ha:

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n \le \left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

dove il segno di uguaglianza vale solo nel caso in cui $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$ e perciò nel caso in cui risulta:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = p\ .$$

Ora, dalla precedente relazione segue:

$$\frac{x_1}{s} \cdot \frac{x_2}{s} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{s} \le \left(\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{cioè} \quad \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{s^n} \le \left(\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{ossia:} \quad p^n \le s^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{e quidni:} \quad s \ge np\ .$$

Cosicché la somma s delle n variabili è sempre maggiore o uguale ad np. Dunque np è il minimo valore di s e si ottiene quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = p$. [c.v.d.]

DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI 3 e 4. Conduciamo contestualmente le dimostrazioni dei due teoremi 3 e 4. A questo riguardo poniamo:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s\ ,\quad {x_1}^{r_1} \cdot {x_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{r_n} = p\ .$$

Supponiamo, in un primo momento, che i numeri r_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ siano interi e poniamo:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r\ .$$

Si ha allora:

$$p = {x_1}^{r_1} \cdot {x_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{r_n} = \left[{r_1}^{r_1} \cdot \left(\frac{x_1}{r_1}\right)^{r_1}\right] \cdot \left[{r_2}^{r_2} \cdot \left(\frac{x_2}{r_2}\right)^{r_2}\right] \cdot \ldots \cdot \left[{r_n}^{r_n} \cdot \left(\frac{x_n}{r_n}\right)^{r_n}\right] =$$

$$= \left({r_1}^{r_1} \cdot {r_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {r_n}^{r_n}\right) \cdot \left(\underbrace{\frac{x_1}{r_1} \cdot \frac{x_1}{r_1} \cdot \ldots \cdot \frac{x_1}{r_1}}_{r_1 \text{ fattori}}\right) \cdot \left(\underbrace{\frac{x_2}{r_2} \cdot \frac{x_2}{r_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_2}{r_2}}_{r_2 \text{ fattori}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\underbrace{\frac{x_n}{r_n} \cdot \frac{x_n}{r_n} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{r_n}}_{r_n \text{ fattori}}\right).$$

Ora avviene che:

$$\underbrace{\left(\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_1}{r_1} + \cdots + \frac{x_1}{r_1}\right)}_{r_1 \text{ addendi}} + \left(\underbrace{\frac{x_2}{r_2} + \frac{x_2}{r_2} + \cdots + \frac{x_2}{r_2}}_{r_2 \text{ addendi}}\right) + \cdots + \left(\underbrace{\frac{x_n}{r_n} + \frac{x_n}{r_n} + \cdots + \frac{x_n}{r_n}}_{r_n \text{ addendi}}\right) =$$

$$= r_1 \cdot \frac{x_1}{r_1} + r_2 \cdot \frac{x_2}{r_2} + \cdots + r_n \cdot \frac{x_n}{r_n} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s\ .$$

Di modo che, prescindendo dalla costante moltiplicativa ${r_1}^{r_1} \cdot {r_2}^{r_2} \cdot \ldots \cdot {r_n}^{r_n}$, si ha quanto segue:

- Se s è costante, in virtù del teorema 1 il prodotto p risulta massimo quando risultano uguali le quantità x_j/r_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, cioè quando si ha:

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \cdots = \frac{x_n}{r_n}.$$

- Se p è costante, in virtù del teorema 2, la somma s risulta minima quando risultano uguali le quantità x_j/r_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, cioè quando si ha:

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \cdots = \frac{x_n}{r_n}.$$

Tutto quanto detto fin qui vale se i numeri r_j sono interi. Se, al contrario, non tutti questi numeri razionali positivi sono interi, diciamo m il minimo comune multiplo dei loro denominatori e poniamo:

$$r_1 = \frac{a_1}{m}\ ,\quad r_2 = \frac{a_2}{m}\ ,\quad \dots\ ,\quad r_n = \frac{a_n}{m}\ ,$$

dove i numeri a_j ed m sono interi positivi. Si ha allora, tendo presente che $r_j m = a_j$:

$$p^m = (x_1{}^{r_1} \cdot x_2{}^{r_2} \cdot \ldots \cdot x_n{}^{r_n})^m = x_1{}^{a_1} \cdot x_2{}^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n{}^{a_n}$$

e a questo punto basta ripetere il ragionamento precedente osservando che p è massimo o costante se lo è rispettivamente p^m e osservando inoltre che le condizioni:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}$$

sono equivalenti a queste altre:

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2} = \cdots = \frac{x_n}{r_n}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Antonino Giambò, *La prova di matematica nei concorsi di scuola media*, Torino, SEI, 1988

[2] I. P. Natanson, *Problemi elementari di massimo e minimo,* Milano, Progresso Tecnico Editoriale, 1970.

[3] Yakov Perelman, *Algebra ricreativa,* RBA Italia, 2008.