π : una storia curiosa e affascinante

di Antonino Giambò

1. Il giorno 14 marzo si scrive nel mondo anglosassone facendo seguire il 3 (terzo mese dell'anno) dal giorno 14 e quindi 3/14. Il che fa di questo giorno il "π day", il giorno di π [(1)].

Questo numero è stato indicato per circa 38 secoli con una perifrasi, come *quella quantità che, moltiplicata per il diametro, dà la lunghezza della circonferenza*, vale a dire come *rapporto fra una circonferenza e il suo diametro*. E solamente dal XVIII secolo è indicato con il simbolo $\boldsymbol{\pi}$.

Esso ha affascinato l'umanità forse dal giorno in cui gli uomini hanno imparato a misurare le lunghezze (non possiamo affermarlo con certezza: *documenta non habemus*) ma ciò è avvenuto sicuramente negli ultimi 4.000 anni, dagli Egizi ai Babilonesi e agli Ebrei, dai Greci ai Romani, dai Cinesi agli Indiani e agli Arabi, e finalmente agli Europei del periodo rinascimentale fino ai giorni nostri (e non è un modo di dire).

Vediamo cosa sappiamo su questo numero.

Sappiamo, dopo i Greci, che π è non solo il rapporto fra una circonferenza e il suo diametro ma anche il rapporto fra l'area di un cerchio e il quadrato del suo raggio.

Sappiamo, da circa due secoli e mezzo, che π è un numero *irrazionale* e, da circa un secolo e mezzo, che è un numero *trascendente*.

Sappiamo che oggigiorno si conoscono circa 50.000 miliardi di cifre decimali di π.

Più modestamente, mi limito ad indicare questo numero con le sue prime 30 cifre decimali:

$$\boldsymbol{\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279} \ldots\ .$$

Ora, giusto per una prima riflessione, bisogna riconoscere che sul piano pratico tutte queste cifre non servono proprio. Faccio un esempio. Se un fisico o un ingegnere attribuiscono a π, per i loro calcoli, il valore 3,141592 – corretto fino al 6° decimale – commettono un errore relativo ε_r pari a un niente. Infatti:

$$\varepsilon_r = \frac{3{,}14159265 - 3{,}141592}{3{,}14159265} \approx 0{,}00002\ \%\,.$$

Anche attribuendo a π il valore più conosciuto, vale a dire 3,14, si commette un trascurabile errore relativo, pari all'incirca allo 0,04%.

Addirittura, se si pone $\pi=3$, si commette un errore di circa il 4%, che non è, poi, un grossissimo errore.

Ma allora – seconda riflessione – perché i ricercatori, se non all'inizio almeno da un certo momento in poi, si sono dati tanto da fare per trovare il maggior numero possibile di cifre decimali di π ?

Oserei dire che l'hanno fatto anzitutto per spirito di avventura e in secondo luogo per curiosarci dentro. E ultimamente, con l'avvento dell'informatica, per testare l'affidabilità dei computer.

Ad ogni modo, quali che siano le ragioni di questa ricerca, ne vedremo il divenire passo dopo passo.

2. La più antica documentazione di π, di cui abbiamo conoscenza, è il **papiro di Rhind** o **di Ahmes**, dal nome dello scriba che lo trascrisse all'incirca nel 1650 a.C., riprendendolo, come egli stesso dichiara, da un esemplare risalente a 2 o 3 secoli prima. Il papiro contiene dei problemi, in numero di 87, che testimoniano delle conoscenze della civiltà egizia in campo matematico.

Uno di questi problemi descrive il procedimento per calcolare l'area di un cerchio: «Togli 1/9 a un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che ne rimane; questo quadrato ha la stessa area del cerchio».

In figura (figura 1) sono rappresentati il cerchio e il quadrato, che secondo lo scriba dovrebbero essere equivalenti. Come dire che la somma delle parti evidenziate in verde dovrebbe essere equivalente a quella delle parti evidenziate in giallo.

Naturalmente lo scriba non esplicita il valore di π, ma noi lo possiamo fare. Sappiamo che l'area di un cerchio di raggio r è πr^2 e, secondo Ahmes, è $(8/9 \cdot 2r)^2$; pertanto: $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}16$.

[1] Detto per curiosità, questo giorno è anche il genetliaco di Albert Einstein (14/3/1879 – 18/4/1955) e anche di Oscar Chisini (14/3/1889 – 10/4/1967).

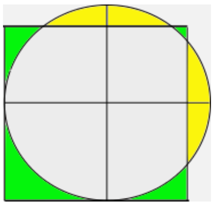

figura 1

Forse per mancanza di comunicazioni, forse per qualche altro motivo, questo valore all'epoca non ebbe molta diffusione, tant'è vero che presso gli **Ebrei** del X sec. a. C. era attribuito a π il valore 3. Così perlomeno si accenna nella Bibbia (III libro dei Re, cap. VII, versetto 23), quando si parla di un gran bacino di bronzo, interamente rotondo, di 10 cubiti di diametro, tale che una corda di 30 cubiti l'avrebbe cinto tutto intorno. Il riferimento è ad un particolare del Tempio di Salomone in Gerusalemme.

Anche i **Babilonesi**, per uso pratico, calcolavano la lunghezza di una circonferenza moltiplicando per 3 quella del suo diametro. Ma una tavoletta, rinvenuta nel 1936 a Susa (località situata a circa 350 km ad Est di Babilonia) e riferentesi a risultati risalenti probabilmente al IX sec. a.C., fornisce, tra le altre cose, il rapporto, uguale a $24/25$, fra il perimetro di un esagono regolare e la lunghezza della circonferenza ad esso circoscritta. Nel nostro linguaggio simbolico, indicato con r il raggio della circonferenza e tenendo presente che il lato dell'esagono è lungo quanto il raggio, si ha:

$$\frac{6\,\mathrm{r}}{2\,\pi\,\mathrm{r}}=\frac{24}{25},\ \text{ da cui segue: }\ \pi=\frac{3\times 25}{24}\approx 3{,}125\,.$$

Egizi e Babilonesi, per non parlare degli Ebrei, non avevano necessità di attribuire a π valori più accurati di quelli che utilizzavano. Quei valori erano infatti adeguati ai loro bisogni, che consistevano soprattutto nella misurazione di aree coltivabili o nella costruzione di edifici.

Sembra che a loro non interessasse una speculazione teorica sull'argomento e per molto tempo non ci furono, per quanto ne sappiamo, riflessioni ulteriori sul rapporto fra una circonferenza e il suo diametro.

3. Le cose incominciarono a cambiare dal momento in cui i **Greci** si occuparono della questione. Con loro, infatti, la Geometria assurse a livello di scienza moderna, di scienza cioè che non solo indica "come" ottenere certi risultati ma anche "perché" bisogna operare in un certo modo. Questo accade a partire dal VI sec. a. C., ma bisogna attendere 3 secoli ancora perché si registrino risultati concreti sul valore di π.

Li ottenne lo scienziato siracusano **Archimede** (287 ca. – 212 a.C.), il quale si servì di un metodo che un paio di secoli prima avevano seguito dapprima il sofista e matematico **Antifonte** di Atene e poi **Brisone** di Eraclea, ma con scarsi risultati per difficoltà di calcolo. Il procedimento di Archimede figura in un piccolo trattato (tre proposizioni in tutto) dal titolo *Misura del cerchio* (2). Egli precisamente, partì da due esagoni regolari, uno inscritto e l'altro circoscritto ad una circonferenza e, raddoppiando per 4 volte il numero dei lati, calcolò i perimetri dei poligoni regolari di 96 lati inscritto e circoscritto alla circonferenza.

Archimede non solo non disponeva di strumenti di calcolo automatico ma nemmeno del nostro agile sistema di numerazione. Eppure riuscì a calcolare i perimetri suddetti e ad ipotizzare una misura della circonferenza. Lo fece precisamente enunciando e dimostrando la seguente proposizione (prop. 3): «La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi». Dunque, secondo i calcoli di Archimede, ogni circonferenza di diametro d ha una lunghezza compresa fra i seguenti valori:

$$\left(3+\frac{10}{71}\right)\mathrm{d}\approx 3{,}1408\ \mathrm{d}\,,\qquad \left(3+\frac{1}{7}\right)\mathrm{d}\approx 3{,}1428\ \mathrm{d}\,.$$

Possiamo dire perciò che il valore trovato da Archimede per il rapporto fra la circonferenza e il suo diametro, cioè per π, è un numero compreso fra 3,1408 e 3,1428. Ragion per cui, pur consapevoli che π è un po' più grande di 3,1408 e un po' più piccolo di 3,1428, siamo sicuri del suo valore fino alla 2ª cifra decimale, vale a dire $\mathbf{3{,}14}$, mentre la 3ª cifra potrebbe essere 0, 1 o 2.

---

[2] Cfr.: Archimede, *Opere* (di), a cura di Attilio Frajese, Torino, UTET, 1974, pagg. 225-231.

Bisogna dire che gli storici sono concordi nel ritenere che quest'opera di Archimede avesse intendimenti pratici e non speculativi, un libro *necessario per i bisogni della vita*. Inoltre, siccome l'opera non è priva di punti oscuri, c'è il sospetto che quella «*a noi giunta non sia l'opera originale di Archimede, ma soltanto un estratto da altra opera più completa*» (Frajese, op. cit. in nota 2, pag. 215).

L'approssimazione di Archimede fu migliorata, circa 4 secoli dopo, dal matematico e astronomo alessandrino **Claudio Tolomeo** (II sec. d. C.), autore di un'opera grandiosa che in seguito sarebbe stata denominata *Almagesto*, la quale contiene, nel 1° di 13 libri, i principi fondamentali della trigonometria piana. Egli, in particolare, fu in grado di calcolare la lunghezza della corda di un cerchio di raggio lungo 60 unità, corrispondente all'angolo al centro di mezzo grado sessagesimale, vale a dire la lunghezza del lato di un poligono regolare di 720 lati inscritto nel cerchio. In questo modo trovò la seguente approssimazione di π, esatta fino al 3° decimale (cosa che noi possiamo affermare con cognizione di causa, ma che per Tolomeo non era una certezza.):

$$3+\frac{8}{60}+\frac{30}{60^2} \quad \text{cioè} \quad \frac{377}{120}\approx 3{,}1416\,.$$

4. Un fatto piuttosto curioso, che vale la pena di segnalare, riguarda i **Romani**. Nel periodo che va dall'anno 27 a. C. (primo anno del principato di Augusto) al 476 d. C. (anno in cui Odoacre, capo degli Eruli, depone l'ultimo imperatore, Romolo Augustolo, mettendo termine all'Impero Romano d'Occidente) furono capaci di costruire monumenti che resistono al tempo. E ciò, nonostante non fossero molto precisi in fatto di approssimazioni nelle misurazioni. Anch'essi, in effetti, ebbero a che fare con il numero π, ma gli attribuirono il valore $3+\frac{1}{8}=3{,}125$, esattamente lo stesso valore della tavoletta babilonese rinvenuta nel 1936, e perciò con un'approssimazione peggiore non solo di quella di Tolomeo ma addirittura peggiore di quella di Archimede. Cosa che però, in fin dei conti, non pregiudicò le loro costruzioni. L'errore che commettevano era infatti trascurabile.

Tanto per fare un esempio, dovendo calcolare la lunghezza di una circonferenza di 10 m di diametro, il valore dei Romani, uguale a 31,25 m, si discosta di 16 cm da quello reale, valevole all'incirca 31,41 m, con un errore relativo dello 0,5%.

5. Nel mondo occidentale, dopo Tolomeo e fino al V secolo, si registrano ancora contributi importanti alla Matematica per merito soprattutto di studiosi del calibro di Diofanto, Pappo, Sereno, ma nessun risultato concreto per quanto concerne π.

Subito dopo, però, incomincia una lunga era di oscurantismo. Nel periodo di tempo che va dal VI secolo a tutto il secolo XII il testo matematico che va per la maggiore in Occidente è un'opera di Manlio Severino Boezio (ca. 470-525), di livello modesto. Di fatto, la Matematica è praticamente assente in un'Europa in cui i vari Paesi sono in guerra perenne fra loro e il progresso scientifico langue.

La Matematica vive però e progredisce nei paesi orientali: in Cina e in India, dove furono compiuti progressi scientifici di rilievo fra il II e l'VIII secolo, e nei paesi arabi, a partire dall'VIII secolo e per circa 400 anni, soprattutto nell'area mesopotamica e nella Persia (grossomodo, odierni Iraq e Iran).

Accenno ai risultati ottenuti da quei popoli riguardo al rapporto fra una circonferenza e il suo diametro.

- All'inizio in **Cina** era usato per π il valore $\sqrt{10}\approx 3{,}162$. Era stato trovato dal matematico e poeta **Zhang Heng** (78-139), il quale nel 139, poco prima di morire, scrisse che il quadrato della lunghezza di una circonferenza di diametro 1 sta al quadrato del perimetro del quadrato circoscritto alla circonferenza come 5 sta a 8 [2]. Nel nostro linguaggio simbolico questo implica la seguente proporzione:

$$\frac{\pi^2}{16}=\frac{5}{8} \quad \text{da cui segue:} \quad \pi=\sqrt{10}\,.$$

Questo valore fu usato a lungo e non solo in Cina.

Il risultato più importante fu ottenuto però nel V secolo dall'astronomo **Tsu Ch'ung-chih** (429-500) e da suo figlio **Tsu Keng-chih** (480-525). Essi trovarono per π il valore $\frac{355}{113}\approx 3{,}1415929$, corretto fino al 6° decimale.

David Blatner [2], e non solo lui [8], ipotizza che lo abbiano fatto partendo da un esagono e raddoppiando 11 volte il numero dei lati, usando perciò un poligono di 24.576 lati. Forse è così e forse no, ma siccome i risultati ottenuti dai due cinesi erano contenuti in un libro andato perduto, ogni ipotesi è possibile al riguardo.

Un'ipotesi differente, ma suggestiva, è fornita da Boyer [3, pag. 237] e segnalata anche da Struik [8, pag. 106]. L'ipotesi è che il valore $\frac{355}{113}$ sia stato ottenuto, *sic et simpliciter*, sottraendo dal numeratore e dal denominatore del valore tolemaico $\frac{377}{120}$ rispettivamente il numeratore e il denominatore del valore archimedeo $\frac{22}{7}$ $\left(=3+\frac{1}{7}\right)$, vale a dire: $\frac{355}{113}=\frac{377-22}{120-7}$.

Comunque sia andata, non si sarebbe trovato un valore più preciso di quello ottenuto dai due cinesi fino al XV secolo, quando il persiano al Kashi trovò un valore corretto fino al 15° decimale.

- In **India**, intorno al V sec. d. C., la Matematica, e in particolare la Matematica greca, non era ignorata, introdottavi forse secoli prima in seguito alle conquiste di Alessandro Magno (356-323 a. C.).

Il primo risultato sul valore di π fu ottenuto dal matematico e astronomo **Aryabhata**, vissuto nel V-VI sec. d. C., autore di uno dei più antichi testi matematici indiani, un'opera in versi dal titolo *Aryabhatiya*. In quest'opera, composta nel 499, Aryabhata indica per π il valore 3,1416, già trovato da Tolomeo ma ricavato da Aryabhata mediante una formula da lui scoperta.

Blatner [2] al riguardo sostiene che Aryabhata avrebbe scritto che «*se a è uguale al lato di un poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio di diametro unitario, e b è il lato di un poligono regolare inscritto di $2n$ lati, allora* $b=\sqrt{0,5-0,5\sqrt{1-a^2}}$ ».

Mediante questa formula, partendo dall'esagono, avrebbe calcolato il perimetro di un poligono regolare di 384 lati, ricavandone approssimativamente il valore di π pari a 3,1414.

È verosimile che approssimazioni grossolane abbiano obbligato Aryabhata a calcolare il perimetro di un poligono di 384 lati, mentre in realtà la formula, correttamente applicata, permette di ottenere quel valore approssimato di π con un poligono di 192 lati.

In ogni caso, quando pubblicò il suo valore – sostiene ancora Blatner – Aryabhata fornì le seguenti istruzioni, tali da ottenere un'approssimazione di π leggermente diversa: «*Somma* 4 *a* 100, *moltiplica per* 8 *e aggiungi* 62.000. *Questa è la circonferenza approssimata di un cerchio di diametro è* 20.000».

Con queste indicazioni, infatti, si ottiene per π il valore indicato sopra, pari a 3,1416.

Curiosamente però Aryabhata, nei suoi calcoli, non si servì di alcuno di quei valori. Si servì invece del valore $\sqrt{10}$, che era stato proposto dal cinese Zhang Heng. Forse perché più facile da ricordare.

Questo stesso valore, peraltro, non solo fu usato anche dal più grande matematico indiano del VII secolo, **Brahmagupta**, attivo intorno al 625 e autore di un'opera intitolata *Brahmasphuta Siddhānta*, ma si diffuse poi pure in Europa, dove fu usato per tutto il Medioevo.

È necessaria una precisazione. Col metodo di Archimede c'è certezza, come abbiamo visto e spiegato, sulla seconda cifra decimale di π. Col metodo di Aryabhata la certezza circa l'esattezza di una cifra decimale c'è ancora, ma in seguito alla costatazione che, crescendo il numero dei lati, da un certo punto in poi quella cifra si stabilizza, oppure con la ricerca di conferme con altri metodi.

- A partire dal secolo VIII, dopo che la loro sete di conquista si fu placata, gli **Arabi** incominciarono a venire a contatto col patrimonio scientifico delle civiltà più progredite e assimilarono rapidamente la cultura dei popoli conquistati. Una delle prime opere di cui ebbero conoscenza fu un'opera di contenuto astronomico-matematico, che nel 766 circolava a Bagdad portatavi dall'India e conosciuta presso gli Arabi col nome di *Sindhind*. Alcuni storici ritengono che potesse essere il *Brahmasphuta Siddhānta* [3, pag. 265].

Ispirandosi forse a quest'opera, il persiano **Mohammed ibn-Musa al-Khuwarīzmi** (IX sec.), uno dei più importanti matematici islamici, compose diverse opere di astronomia e di matematica. In queste opere egli usò per π valori diversi: $3+\frac{1}{7}$, attribuendolo ai Greci, e $\sqrt{10}$, attribuendolo erroneamente agli Indiani.

Come già detto, un altro persiano, al Kashi, ma molto tempo dopo, nel XV secolo, avrebbe trovato una approssimazione di π corretta fino alla 15ª cifra decimale. Per la prima volta veniva migliorata non solo l'approssimazione di Tolomeo, che era nota, ma anche quella di Tsu Ch'ung-chih e Tsu Keng-chih (480-525), che invece era rimasta sconosciuta.

6. Al-Khuwarizmi non fu l'unico matematico arabo di rilievo anche se egli costituisce la fonte principale attraverso cui giunsero agli europei le conoscenze in campo matematico, sia quelle originali degli Arabi sia quelle delle opere dei Greci.

Ma prima ancora che il contributo degli Arabi al progresso della Matematica cessasse (il che avvenne praticamente nel XIII secolo), già nel XII secolo la loro eredità e, tramite loro, quella dei Greci vennero raccolte in Europa attraverso le traduzioni in latino sia delle loro opere sia delle versioni arabe delle opere dei Greci.

Per la verità, dopo la fase delle traduzioni, quella dell'assimilazione di queste opere fu assai lenta soprattutto perché per troppo tempo erano mancati in Occidente fattori stimolanti per lo studio della Matematica e perciò nessuno possedeva quel grado, piuttosto alto, d'istruzione preliminare (il *background culturale*, si direbbe oggi) che gli consentisse di comprendere appieno la portata e il significato delle opere tradotte. Ricordo che ancora nel XII secolo costituivano la massima autorità in campo matematico i manuali di Severino Boezio.

Ad ogni modo è all'inizio del XIII secolo che cominciano ad avvertirsi concreti segni di risveglio e nuovi interessi in campo matematico.

Il merito principale va attribuito a **Leonardo Fibonacci**, vissuto tra la fine del XII e la prima metà del XIII secolo. Egli, durante i suoi numerosi viaggi, effettuati anche in Oriente, in qualità di mercante, apprese e assimilò la matematica degli Arabi. E scrisse alcuni libri. In uno di questi, intitolato *Practica geometriae*, pubblicato nel 1220 (o nel 1221), egli usò per π il seguente valore: $\frac{864}{275} \approx 3{,}1418$.

Il valore usato da Fibonacci non migliorava quello di Archimede ed era comunque peggiore dei valori trovati dai matematici orientali. Questo fatto, di utilizzare approssimazioni di π peggiori di quelli usati in precedenza, fu una costante durante il Medioevo, come ho già accennato.

Bisogna giungere all'anno 1593 per ottenere con **François Viète** (1540-1603), uomo politico francese, matematico per diletto, un'approssimazione di π corretta fino alla 10ª cifra decimale. Era un'ottima approssimazione, ma non migliorava quella che circa due secoli prima aveva ottenuto al Kashi.

Una conquista importante venne fatta comunque da Viète: quella di esprimere π come prodotto di un numero infinito di fattori (denominato *prodotto infinito*). Egli infatti dimostrò la seguente formula, che è il primo esempio del genere:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ldots\ .$$

Per dimostrarla, Viète usò il metodo di Aryabhata di partire da un poligono regolare (un quadrato nel suo caso) inscritto in un cerchio di raggio 1 e di raddoppiare via via il numero dei suoi lati. Solo che, invece di approssimare la circonferenza al perimetro del poligono, approssimò l'area del cerchio a quella del poligono.

La formula è oltretutto interessante poiché apre la strada a conquiste più importanti, specialmente in quello che sarà il campo dell'Analisi Matematica. Ma questo avverrà qualche secolo dopo.

Al momento i ricercatori sono ancora impegnati a trovare cifre decimali di π col metodo di Aryabhata e sprecano anni e anni in un lavoro certosino che di fatto non conduce a nulla di interessante. Per esempio, il matematico tedesco **Ludolph van Ceulen** (1540-1610), spendendo gran parte della sua vita, riuscì a calcolare 35 cifre decimali, ma impiegando poligoni con miliardi di lati e, al tempo stesso, mostrando una pazienza da far invidia a Giobbe, e una resistenza fisica da vero atleta sportivo. Egli era d'altronde un discreto schermidore.

Comunque, un bel momento, anche col progredire delle conoscenze matematiche, i ricercatori si allontanarono dal metodo di Aryabhata per il calcolo delle cifre decimali di π.

Fu così che il matematico inglese **John Wallis** (1616-1703), professore all'Università di Oxford, uno dei precursori del Calcolo Differenziale, sulle piste di quella che era stata una scoperta di Viète, trovò la seguente espressione, nuovo esempio di *prodotto infinito*, per approssimare π:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \cdot \left(\frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9}\right) \cdot \ldots\ .$$

L'espressione figura nella sua opera intitolata *Arithmetica infinitorum* e pubblicata nel 1665.

Questa espressione, a dire il vero, è poco pratica giacché converge molto lentamente. Tanto per dire, la cifra delle unità di π compare per n=5, la prima cifra decimale per n=19, la seconda addirittura per n=358.

Poco dopo **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716), cambiando di nuovo strategia e utilizzando le serie, ne propose una particolare per il calcolo di π, la seguente:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \ ,$$

ottenuta ponendo x=1 nella seguente serie di potenze:

$$\operatorname{atan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots .$$

Ma anch'essa non è conveniente ai fini pratici per lo stesso motivo: converge molto lentamente.

La serie numerica, per la verità, era stata scoperta qualche anno prima dallo scozzese **James Gregory** (1638-1675) e addirittura secoli prima dall'indiano **Madhava di Sangamagrama** (1350-1425), tant'è che è denominata indifferentemente *serie di Lebniz per π*, *serie di Leibniz-Madhava per π*, *serie di Gregory per π.*

Ricorse a procedimenti geometrici, ancorché supportati dal Calcolo Integrale, il matematico britannico **Thomas Simpson** (1710-1761), il quale trovò una regola, nota come *regola di Simpson* (ma anche *regola di Cavalieri-Simpson*), mediante la quale calcolò le prime 4 cifre decimali esatte di π [1].

Le cose migliorano decisamente quando il matematico inglese **John Machin** (1680-1751), cambiando ancora una volta strategia, trovò nel 1706 la seguente formula per il calcolo di π:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{1}{239}\right),$$

mediante la quale riuscì a calcolare 100 cifre decimali.

In realtà, la formula non è una formula di approssimazione in senso stretto, in base alla quale si può calcolare il valore di π fino ad una determinata cifra decimale e non oltre. Si tratta infatti di una formula che fornisce il valore "esatto" di π, ammesso che questa espressione abbia un significato, considerato che π ha infinite cifre decimali. Insomma, la formula consente di trovare quante cifre decimali si vogliano di π. Ma questo si può ottenere solo con un computer, strumento che Machin non possedeva [6].

Anche **Leonhard Euler** (1707-1783) propose formule dello stesso tipo, una delle quali è la seguente:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \operatorname{atan}\left(\frac{3}{79}\right).$$

Ad Eulero è dovuta in particolare una formula che risolve il cosiddetto *problema di Basilea*, del quale non posso occuparmi in questa sede. La formula è la seguente:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Non è proprio il caso di servirsene per trovare cifre decimali di π, poiché converge molto lentamente. Tanto per dire, la seconda cifra decimale si presenta con la somma dei primi 599 termini. In realtà, la formula non ha questo scopo, bensì quello di calcolare a quale valore tende la serie. Se, poi, se ne vuole un valore approssimato, basta attribuire un valore approssimato a π. Per esempio, per π=3,141592653 si ottiene il valore 1,644934.

Altre formule di approssimazione di π, non migliori di quella di Machin, furono create poco più di un secolo dopo dal geniale matematico indiano **Srinivasa A. Ramanujan** (1887-1920). Una di esse, qui appresso riportata, fornisce un'approssimazione esatta fino alla 8ª cifra decimale:

$$\pi = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx 3{,}141\,592\,652 \, .$$

Utilizzando soprattutto formule analoghe a quella di Machin, anche con più di due arcotangenti, ma utilizzando anche sviluppi in serie e prodotti infiniti, ancor prima dell'avvento del computer, i "cercatori di cifre decimali di π" sono riusciti a trovarne fino a 500.

Ma con l'avvento del computer, che ha anche reso possibili altri e più sofisticati metodi d'indagine, questo numero è cresciuto a dismisura, tanto che oggigiorno si è arrivati al numero enorme di 50.000 miliardi di cifre. A questo numero è pervenuto infatti il 29 gennaio 2020 il ricercatore statunitense **Timothy Mullican**.

7. Considerazioni varie riguardanti π.

- Chi per primo usò la lettera π nel suo significato moderno, vale a dire come rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro, fu il matematico gallese **William Jones** (1675-1749) che lo usò nella sua opera intitolata *Synopsis Palmariorum Matheseos*, pubblicata nel 1706. Ma fu il largo uso che ne fece Eulero che determinò l'affermarsi di quel simbolo.
- Prima di Euclide e di Archimede non c'era consapevolezza del fatto che il rapporto fra una circonferenza e il suo diametro avesse un valore costante né che esso fosse uguale al rapporto fra l'area del cerchio e il quadrato del raggio.
- Del numero π esistono costruzioni geometriche che ne forniscono dei valori approssimati [3]. Una di queste è stata ideata dal matematico e gesuita polacco **Adam Adamandy Koskanski** (1631-1700), che la descrive in una sua opera del 1685. Lo facciamo anche noi.

In una circonferenza di centro O e raggio 1 (figura 2) si traccia il diametro AB e sulla retta tangente in A si prendono, da parti opposte di A, il punto C tale che l'angolo AÔC misuri 30° ed il punto D tale che il segmento CD sia lungo 3. La lunghezza di BD esprime un'approssimazione di π, esatta fino alla 4ª cifra decimale.

In effetti, siccome: $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{AD}=3-\frac{1}{\sqrt{3}}$, risulta:

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{2^2+\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\approx 3{,}14153\ .$$

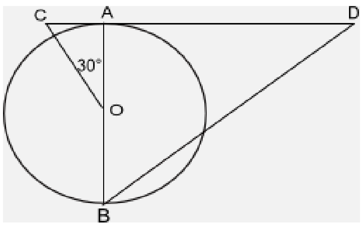

figura 2

- Nel 1761 lo scienziato svizzero **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777) dimostrò che **π è un numero irrazionale** e perciò non può essere espresso come rapporto di due interi.

Esistono tuttavia rapporti di due interi che approssimano π. Si rivedano al riguardo, a titolo di esempio, i valori trovati da Archimede, Tolomeo, Tsu Ch'ung-chih.

- Una volta fissata una determinata approssimazione di π, si può stabilire qual è il poligono regolare col minor numero di lati, inscritto in un cerchio, il cui perimetro approssima la circonferenza del cerchio e il poligono la cui area approssima quella del cerchio. Per esempio, se si fissa per π il valore 3,14 i due poligoni sono rispettivamente quello di 57 lati e quello di 114 lati.
- Nel 1882 il tedesco **Ferdinand von Lindemann** (1852-1939) dimostrò che π è un numero trascendente. Il che significa che non esiste alcun polinomio a coefficienti interi di cui π sia una radice.
- Rimangono inevase alcune domande come, per esempio, le seguenti: Ci sono regolarità nella successione delle infinite cifre di π ? Compare mai la successione di cifre 0123456789 ? Si può affermare che la probabilità di trovare, in un determinato posto, una di queste 10 cifre è la stessa, vale a dire 1/10, quale che sia la cifra scelta ?

8. Un'ultima importante riflessione. Prima della scoperta della trascendenza di π, la dimostrazione della sua irrazionalità, trovata da Lambert, peraltro piuttosto complicata, era fondamentale per essere sicuri di questa caratteristica di π. Ma dopo la scoperta di Lindemann è diventata un puro e semplice reperto storico. Questo perché la trascendenza porta con sé automaticamente l'irrazionalità.

Provo a chiarire questo concetto.

---

[3] Cfr.: W. Rouse Ball, *Recreations mathématiques et problèmes des temps anciens e modernes*, deuxième partie, Paris, Librairie Scientifique A. Hermann, 1908, pag. 301 e segg..

Osserviamo anzitutto che **ogni numero razionale è radice di almeno un'equazione a coefficienti interi**.

Per esempio, il numero razionale p/q, dove p, q sono interi ($q\neq 0$) lo è dell'equazione $qx-p=0$.

In virtù della contronominale di questa proposizione, possiamo allora dire che **se non esiste alcuna equazione a coefficienti interi di cui un dato numero reale sia una radice allora quel numero non è razionale. È perciò un numero irrazionale**.

Attenzione! Questo non significa che, se esiste un'equazione a coefficienti interi di cui il numero sia una radice, allora è un numero razionale. Tanto per capirci, $\sqrt{2}$ è radice dell'equazione $x^2-2=0$, ma non è un numero razionale.

Dimostriamo adesso che π è un numero trascendente.

Ma prima di tutto ricordiamo le definizioni di "numeri algebrici" e "numeri trascendenti": un numero si dice *algebrico* se esiste almeno un'equazione a coefficienti interi di cui esso è una radice, altrimenti si dice *trascendente*. Si desume che un numero (reale o complesso) è o algebrico o trascendente. *Tertium non datur*.

Ora, se esso è algebrico, può essere razionale o irrazionale; ma se è trascendente è certamente irrazionale.

Se, dunque, si dimostra che π è un numero trascendente, si deve concludere che è irrazionale.

Per questa dimostrazione richiamiamo il seguente *teorema di Lindemann* (noto anche come *teorema di Lindemann-Weierstrass*) di cui ometto la dimostrazione, assai laboriosa e complessa:

Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono numeri algebrici distinti (reali o complessi) e $k_1, k_2, \dots, k_n$ sono numeri interi non tutti nulli, allora l'espressione:

$$\sum_{j=1}^{n} k_j\, e^{\alpha_j} \tag{1}$$

dove "e" è il numero di Nepero, **non può essere nulla**.

A questo punto si chiama in causa la celebre formula di Eulero: $e^{\pi i}+1=0$ e si osserva che il suo primo membro è un caso particolare della (1), in cui si ponga: $n=2,\ k_1=k_2=1,\ \alpha_1=\pi i,\ \alpha_2=0$.

Dato, pertanto, che l'espressione $e^{\pi i}+1=k_1e^{\alpha_1}+k_2e^{\alpha_2}$ è nulla e dato che k_1, k_2 sono interi non nulli e α_2 è un numero algebrico, il numero $\alpha_1=\pi i$ non può essere un numero algebrico (altrimenti l'espressione non sarebbe nulla). Deve essere perciò un numero trascendente.

D'altra parte, considerando il prodotto πi, il fattore "i" è un numero algebrico (è radice dell'equazione $x^2+1=0$). Di conseguenza π deve essere un numero trascendente. E dunque è irrazionale.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Emilio Ambrisi, *Il calcolo di π con il metodo di Simpson*, Matmedia.it, 09/11/2000.
[2] David Blatner, *Le gioie del* π, Milano, Garzanti, 1999.
[3] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1980.
[4] Livia Giacardi – Silvia Clara Roero, *La matematica delle civiltà arcaiche*, Torino, Stampatori, 1979.
[5] Antonino Giambò, *Numeri algebrici e numeri trascendenti*, in MatematicaMente, sezione veronese della Mathesis, N. 231, pubblicato in data 04/12/2017.
[6] Antonino Giambò, *Formule con arcotangenti per il calcolo di* π, su questa medesima rubrica, luglio 2021.
[7] Antonino Giambò – Roberto Giambò, *Matematica pre-universitaria*: *storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.
[8] Dirk J. Struik, *Matematica: un profilo storico*, Bologna, il Mulino, 1981.
[9] Wikipedia, libera enciclopedia on-line.