Esercizio 1.

Si considerino il numero $1000!+1$ e le alternative seguenti:

[A] Il numero è divisibile per 3. [B] Il numero è divisibile per 7.

[C] Il numero è divisibile per 11. [D] Il numero non è divisibile per alcuno dei numeri 3, 7, 11.

Una sola alternativa è corretta. Dire qual è e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

Bisogna far capire che non è necessario sviluppare il numero $1000!+1$ e, se anche lo si facesse, il risultato sarebbe comunque del tutto inutilizzabile. È sufficiente, invece, costatare che $1000!$ è divisibile sia per 3 sia per 7 sia per 11. Di modo che, dividendo per ognuno di tali numeri il numero $1000!+1$ si ottiene sempre resto 1. Si desume che le alternative [A], [B], [C] sono false. L'alternativa corretta è la [D].

Esercizio 2.

Spiegare in modo esauriente perché il numero $n!$ – dove n è un qualsiasi numero naturale maggiore di 6 ma minore di 29 – è divisibile per 28 ma non è divisibile per 29.

Siccome $28=4\times7$ e sia 4 sia 7 figurano tra i divisori di $n!$, questo numero è divisibile per 28. Invece 29, che è un numero primo, non figura fra i divisori di $n!$ considerato che $n<29$, per cui $n!$ non è divisibile per 29.

Esercizio 3.

Si considerino i due numeri $n!$ ed $n!+1$.

E' vero o è falso che i due numeri sono primi fra loro qualunque sia il numero naturale n?

Fornire una spiegazione esauriente della risposta.

Se si fanno delle verifiche per particolari valori di n, si trova che sempre i due numeri sono primi fra loro, ma questo non è sufficiente per concludere che questo è vero per ogni n. Anche se si è convinti che così deve essere, le verifiche non bastano. Questo è ovvio. È necessario un ragionamento generale.

Ebbene, il ragionamento da farsi è simile a quello esposto nel primo esercizio: se un qualunque numero A è divisibile per il numero p, allora il numero $A+1$, diviso per p, dà sempre resto 1. Quindi i due numeri A ed $A+1$ non possono avere divisori comuni, diversi da 1. Sono pertanto numeri primi fra loro. Questo, ovviamente, vale anche se $A=n!$.