Metodi a confronto per il calcolo di π
di Antonino Giambò

1. Prima che, nel Settecento, il matematico inglese **John Machin** (1680-1751) trovasse una formula idonea ad ottenere innumerevoli cifre decimali di π, gli studiosi dovevano accontentarsi di conoscere poche cifre decimali del rapporto fra una circonferenza e il suo diametro [1].

Egizi, Babilonesi, anche Ebrei, avevano calcolato valori approssimati di π, ma senza averne piena consapevolezza, tranne che per la cifra delle unità. Le cose cambiarono a partire da **Archimede** (III sec. a.C.).

Egli si servì di poligoni inscritti e circoscritti ad un cerchio e, partendo da esagoni regolari e raddoppiando 4 volte il numero dei lati, giunse a calcolare il perimetro del poligono regolare di 96 lati inscritto nel cerchio e quello del poligono regolare di 96 lati circoscritto. Con questo metodo, ma con un procedimento lungo e articolato, ipotizzando legittimamente che la circonferenza avesse una lunghezza compresa fra i perimetri dei due poligoni, dimostrò la seguente relazione:

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}\,,\quad \text{vale a dire:}\quad 3{,}1408<\pi<3{,}1428\,,$$

trovando così un'approssimazione di π esatta fino al 2° decimale ed avendone soprattutto la consapevolezza.

Questa approssimazione fu migliorata dall'alessandrino **Claudio Tolomeo** (II sec. d.C.), ma non con lo stesso procedimento seguito da Archimede, bensì con l'uso della trigonometria, della quale egli poneva le fondamenta. In questo modo riuscì a calcolare il perimetro di un poligono di 720 lati inscritto in un cerchio di raggio lungo 60 unità e trovò un'approssimazione di π corretta fino al 3° decimale.

In seguito, il metodo di Archimede fu modificato anche dall'indiano **Aryabhata** (VI sec. d.C.), che prese in considerazione solamente i poligoni regolari inscritti in un cerchio, ma raddoppiando sempre il numero dei lati. E questo nuovo metodo fu seguito per lungo tempo, e si arrivò così dapprima a calcolare con lo stesso Aryabhata un valore approssimato di π con tre cifre decimali esatte e successivamente con 15 cifre (al Kashi – XV sec.) e addirittura con 35 cifre decimali esatte (van Ceulen – XVI sec.).

Un nuovo cambiamento del metodo di ricerca fu apportato dal francese **François Viète** (XVI sec.), il quale usò, sì, il metodo di partire da un poligono regolare inscritto in un cerchio e di raddoppiare via via il numero dei suoi lati. Solo che, invece di approssimare la circonferenza al perimetro del poligono, approssimò l'area del cerchio a quella del poligono. Poligono che, in partenza, fu un quadrato.

Viète si servì della trigonometria, che nel frattempo si stava sviluppando nel mondo occidentale, anche per merito suo.

Ma proprio con l'uso della trigonometria fu possibile perfezionare il metodo di Archimede, non tanto perché fosse più efficace dei precedenti, ma perché consentiva di chiarire un punto fondamentale che i metodi precedenti non affrontavano. Ne parleremo più avanti.

In questo articolo, tralasciando il procedimento di Archimede, descriverò quelli di Aryabhata e di Viète, nonché il procedimento trigonometrico al quale ho accennato. Mi propongo anche di dimostrare le formule corrispondenti. Formule che userò per compilare tabelle con alcuni valori approssimati di π, ottenuti, *ça va sans dire*, mediante uno strumento di calcolo automatico, precisamente un foglio elettronico.

Preciso, a scanso di equivoci, che tutto questo non ha certamente lo scopo di scoprire cifre decimali di π, ossia di scoprire l'acqua calda, bensì di far riflettere sull'evoluzione dei metodi di ricerca dei valori approssimati di π. E perciò ha una finalità di carattere storico.

2. Incominciamo con la formula di Aryabhata, che è la seguente:

$$L_{2n}=\sqrt{0{,}5\cdot\left(1-\sqrt{1-L_n^{\,2}}\right)}\,,$$

[1] Cfr.: Su questa medesima rubrica, dello stesso autore e sul medesimo tema sono stati pubblicati di recente i seguenti articoli: *Formule con arcotangenti per il calcolo di* π e π*: una storia curiosa e affascinante*

dove L_n è il lato del poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di diametro 1 ed L_{2n} è il lato del poligono regolare di 2n lati inscritto nella stessa circonferenza. Si parte dall'esagono, per cui n=6 e L_n=0,5.

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI ARYABHATA.

Nella circonferenza di centro O e diametro 1 sia inscritto un poligono regolare di n lati e sia AB un suo lato, perpendicolare al diametro CD (figura 1). Il segmento AC è evidentemente il lato del poligono regolare di 2n lati inscritto nel cerchio.

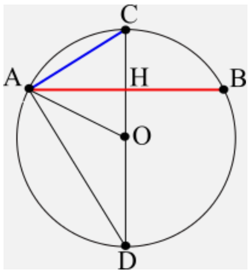

figura 1

In virtù del 1° teorema di Euclide, applicato al triangolo rettangolo CDA, si ha: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{CD} \cdot \overline{CH}}$.

D'altro canto:

$$\overline{CH} = \overline{CO} - \overline{OH} = \overline{CO} - \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \overline{AB}^2}\right).$$

Ora, essendo $\overline{AB}=L_n$, $\overline{AC}=L_{2n}$ e $\overline{CD}=1$, la formula di Aryabhata è dimostrata.

Sulla base di questa formula e con l'ausilio di un foglio elettronico, ho compilato la seguente tabella, spingendomi fino al poligono di 24.576 lati (lunghezza del lato ≈ 0,000127832). Dopo questo valore, in considerazione del fatto che i successivi valori di L_n diventano troppo piccoli, un foglio elettronico non si presta più al nostro scopo. Bisogna servirsi di strumenti di calcolo più sofisticati.

Tabella 1 - Calcolo di π con la formula di Aryabhata.

n = numero dei lati del poligono inscritto in un cerchio di diametro 1	L_n = lato del poligono di n lati inscritto nel cerchio	L_{2n} = lato del poligono di 2n lati inscritto nel cerchio	$\pi \approx 2\, n\, L_{2n}$	Numero di cifre decimali esatte di π
6	0,5	0,258819045	3,10	1
12	0,25881945	0,130526192	3,13	1
24	0,130526192	0,065403129	3,13	1
48	0,065403129	0,032719083	3,141	3
96	0,032719083	0,016361732	3,1414	3
192	0,016361732	0,008181140	3,14155	4
384	0,008181140	0,004090604	3,14158	4
768	0,004090604	0,002045306	3,141590	5
1.536	0,002045306	0,001022654	3,1415921	6
3.072	0,001022654	0,000511327	3,1415925	6
6.144	0,000511327	0,000255663	3,14159261	7
12.288	0,000255663	0,000127832	3,14159264	7

3. Nell'anno 1593 François Viète (1540-1603), uomo politico francese, matematico per diletto, dimostrò la seguente formula, con la quale ottenne un'approssimazione di π corretta fino alla 10ª cifra decimale:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ldots\ .$$

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI VIÈTE.

Sia dato un cerchio di diametro AB, centro O e raggio 1 (figura 2). Sia inoltre AP il lato del poligono regolare di n lati inscritto in esso. Condotto per O il raggio OQ perpendicolare ad AP, il segmento AQ è chiaramente il lato del poligono regolare di 2n lati inscritto nel cerchio medesimo.

Posto $A\hat{O}P=2\alpha$, risulta evidentemente: $A\hat{O}Q=Q\hat{O}P=A\hat{B}P=\alpha$.

L'area S(n) del poligono regolare di lato AP è pertanto uguale ad n volte l'area del triangolo OAP, ossia:

$$S(n) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OP} \cdot \sin A\hat{O}P = \frac{n}{2} \cdot \sin 2\alpha = n \sin \alpha \cos \alpha\,.$$

Quella del poligono regolare di lato AQ è invece uguale a 2n volte quella del triangolo OAQ, ossia:

$$S(2n) = 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OQ} \cdot \sin A\hat{O}Q = n \cdot \sin \alpha\,.$$

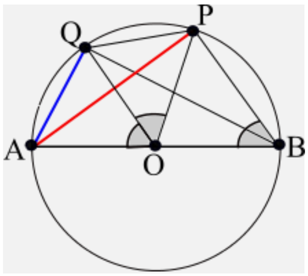

figura 2

Pertanto, chiaramente:

$$S(2n) = S(n) \cdot \frac{1}{\cos \alpha}\,.$$

Analogamente:

$$S(2^2 \cdot n) = S(2n) \cdot \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} = S(n) \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\,.$$

E, di nuovo:

$$S(2^3 \cdot n) = S(2^2 \cdot n) \cdot \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{4}} = S(n) \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2^2}}\,.$$

E così via, per $k \geq 1$:

$$\frac{S(2^k \cdot n)}{S(n)} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2^2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2^{k-1}}}\,.$$

Se si parte dal quadrato, come ha fatto Viète, per cui n=4, S(4)=2, α=45°, si ricava:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad \cos\frac{\alpha}{2^2} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},\quad \ldots\,.$$

Costatato infine che approssimativamente $S(2^k \cdot 4)=\pi$, si ha:

$$\frac{S(2^k \cdot 4)}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

La formula di Viète risulta così dimostrata.

La formula, per la verità, è poco pratica per il calcolo di π. Si richiede infatti un numero elevato di calcoli di radici quadrate nient'affatto semplici. Ma questo se il calcolo è fatto "a mano", come dovette fare Viète, che pure arrivò a trovare la decima cifra decimale esatta di π.

Se invece si utilizza uno strumento di calcolo automatico, le cifre di π scaturiscono in rapida successione. La seguente tabella ne riporta alcune, trovate mediante l'uso di un foglio elettronico:

Tabella 2 – Calcolo di π con la formula di Viète					
Numero dei primi k fattori	Numero n di lati del poligono inscritto nel cerchio di raggio 1	Fattore k-esimo: $1/\cos\frac{45°}{2^{k-1}}$	Prodotto dei primi k fattori = P_k	Area del poligono di 2n lati inscritto nel cerchio: $2\,P_k \approx \pi$	Numero di cifre decimali esatte di π
1	4	1,41421356237309	1,41421356237309	2,8	0
2	8	1,08239220029239	1,53073372946036	3,0	0
3	16	1,01959115820832	1,56072257612902	3,12	1
4	32	1,00483857237631	1,56827424527297	3,13	1
5	64	1,00120599647039	1,57016557847737	3,140	2
6	128	1,00030127204130	1,57063862546638	3,1412	3
7	256	1,00007530383110	1,57075690057215	3,14151	4
8	512	1,00001882507178	1,57078647018354	3,14157	4
9	1.024	1,00000470621257	1,57079386263858	3,14158	4
10	2.048	1,00000117654968	1,57079571075560	3,141591	5
11	4.096	1,00000029413720	1,57079617278506	3,1415923	6
12	8.192	1,00000007353429	1,57079628829243	3,1415925	6
13	16.384	1,00000001838357	1,57079631716928	3,14159263	7
14	32.768	1,00000000459589	1,57079632438849	3,14159264	7
15	65.536	1,00000000114897	1,57079632619329	3,141592652	8
16	131.072	1,00000000028724	1,57079632664449	3,1415926532	9
17	262.144	1,00000000007181	1,57079632675730	3,14159265351	10
18	524.288	1,00000000001795	1,57079632678550	3,14159265357	10
19	1.048.576	1,00000000000449	1,57079632679255	3,141592653585	11

4. Le due tabelle precedenti ci raccontano questa storia: attraverso il calcolo del perimetro o dell'area di un poligono regolare di un determinato numero di lati, inscritto in un cerchio, si perviene ad un valore approssimato di π.

Così, per esempio, calcolando il perimetro del poligono regolare di 96 lati si perviene al valore 3,14 di π (tabella 1). Come pure si perviene allo stesso valore di π, calcolando l'area del poligono regolare di 128 lati (tabella 2).

Ovviamente, siccome i valori registrati nelle tabelle sono ottenuti procedendo per successivi raddoppi del numero dei lati, non possiamo escludere che alla stessa approssimazione di π si giunga con altri poligoni, aventi un numero minore di lati.

Ci poniamo pertanto le seguenti domande: una volta scelta l'approssimazione di π, in particolare se si pone $\pi=3{,}14$, qual è il poligono regolare col minor numero di lati inscritto nel cerchio il cui perimetro approssima la circonferenza? Si tratta dello stesso poligono se si calcola l'area?

I due metodi descritti sopra non aiutano ad ottenere le risposte. Occorre un metodo che permetta di calcolare le varie approssimazioni di π, in corrispondenza di poligoni il cui numero di lati, variando, aumenti ogni volta di una unità.

Questo si può ottenere attraverso la trigonometria. Precisamente, considerati una circonferenza di raggio r e il poligono regolare di n lati inscritto in essa, e indicati con $P(n)$ e $S(n)$ rispettivamente il perimetro e l'area del poligono, si dimostra anzitutto che risulta:

$$\frac{P(n)}{2r} = n\sin\frac{180°}{n}\,,\qquad \frac{S(n)}{r^2} = \frac{n}{2}\sin\frac{360°}{n}\,.$$

I valori espressi dalle due formule, per un assegnato valore di n, sono approssimazioni di π.

DIMOSTRAZIONE DELLE DUE FORMULE.

Sia AB il lato di un poligono di n lati inscritto nella circonferenza di centro O e raggio r (figura 3). Risulta evidentemente: $A\widehat{O}B=\frac{360°}{n}$. Per cui, indicata con H la proiezione ortogonale di O su AB, risulta $A\widehat{O}H=\frac{180°}{n}$.

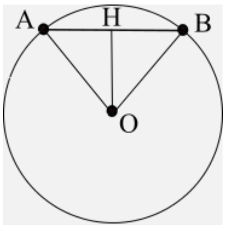

figura 3

Si ha pertanto:

$$\overline{AB} = 2\,\overline{AH} = 2\,r\sin A\hat{O}H = 2\,r\sin\frac{180°}{n}.$$

Di conseguenza, indicato con P(n) il perimetro del poligono in questione, risulta:

$$P(n) = n\,\overline{AB} = n\cdot 2\,r\sin\frac{180°}{n}.$$

Da qui si desume immediatamente la prima delle due formule.

Sia ha inoltre:

$$\text{Area}(AOB) = \frac{1}{2}\,\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\sin A\hat{O}B = \frac{1}{2}\,r^2\sin\frac{360°}{n}.$$

Di conseguenza:

$$S(n) = n\cdot\text{Area}(AOB) = n\cdot\frac{1}{2}\,r^2\sin\frac{360°}{n}.$$

Da qui si deduce la seconda delle due formule.

Ora, con l'aiuto di un foglio elettronico si trovano i valori riportati nella seguente tabella:

n	$\frac{P(n)}{2r} = n\sin\frac{180°}{n}$		n	$\frac{S(n)}{r^2} = \frac{n}{2}\sin\frac{360°}{n}$
56	3,139		113	3,139
57	3,140		114	3,140

tabella 3

Questo significa che, attribuendo a π il valore 3,14, il poligono regolare col minor numero di lati inscritto nel cerchio il cui perimetro approssima la circonferenza ha 57 lati, mentre il poligono regolare col minor numero di lati la cui area approssima quella del cerchio ha 114 lati.

5. Ritorniamo ad Archimede. Il suo metodo, di ricorrere a poligoni inscritti e circoscritti, non ebbe molto seguito, quasi certamente perché risultava troppo faticoso; ed era oggettivamente difficile per quei tempi, trovare i perimetri dei poligoni regolari, sia inscritti in un cerchio sia soprattutto circoscritti, dopo aver raddoppiato considerevolmente il numero dei lati.

E fu probabilmente per questo motivo che Aryabhata si servì dei soli poligoni inscritti.

Una formula analoga a quella di Aryabhata per i poligoni circoscritti, tuttavia, esiste e mostro come ottenerla, ma con l'ausilio della trigonometria. Strumento che né Aryabhata né tantomeno Archimede possedevano e che diventò "adulto" solo dopo il XVI secolo.

Si considera una circonferenza di centro O e diametro 1 (figura 4).

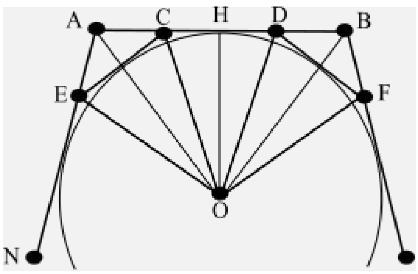

figura 4

Sia AB il lato di un poligono regolare di n lati circoscritto ad essa e sia H il punto di tangenza. Il segmento CD, simmetrico rispetto ad H e tale che l'angolo $C\hat{O}D$ misuri la metà di $A\hat{O}B$, è il lato di un poligono regolare di 2n lati circoscritto alla circonferenza. Se AN è un altro lato del primo poligono, si spiega che la corda CE di tale poligono, perpendicolare ad OA e tangente alla circonferenza, è un altro lato del secondo poligono.

Si trova facilmente che $\mathrm{CE} = 2\ \mathrm{AC} \cdot \sin\alpha$, avendo posto $\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{C}=\alpha$.

Inoltre: $\tan\alpha = \mathrm{OH}/\mathrm{AH}$ ossia, tenendo presente che $\overline{\mathrm{OH}}=1/2$, $\tan\alpha = \frac{1}{2\,\overline{\mathrm{AH}}}$.

D'altro canto, essendo $\alpha<90°$, si ha:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\ ,\ \text{ per cui, a conti fatti: }\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{4\,\overline{\mathrm{AH}}^2+1}}\,.$$

Dunque, siccome AC=AH−CH e, come visto sopra, $\mathrm{CE} = 2\ \mathrm{AC} \cdot \sin\alpha$, risulta:

$$\overline{\mathrm{CE}} = 2 \cdot \left(\overline{\mathrm{AH}} - \overline{\mathrm{CH}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4\,\overline{\mathrm{AH}}^2+1}}\,.$$

Posto adesso $\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{K_n}$ e $\overline{\mathrm{CE}}=\mathrm{K_{2n}}$, per cui: $\overline{\mathrm{AH}}=\mathrm{K_n}/2$ e $\overline{\mathrm{CH}}=\mathrm{K_{2n}}/2$, si ottiene la seguente equazione nell'incognita $\mathrm{K_{2n}}$:

$$\mathrm{K_{2n}} = 2 \cdot \left(\frac{\mathrm{K_n}}{2} - \frac{\mathrm{K_{2n}}}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{K_n}^2+1}}\,.$$

La quale equazione, dopo alcune elementari elaborazioni, si può mettere nella seguente forma:

$$\mathrm{K_n}\,\mathrm{K_{2n}}^2 + 2\,\mathrm{K_{2n}} - \mathrm{K_n} = 0\,.$$

Una volta risolta quest'equazione e presa la sola radice positiva, si trova:

$$\mathrm{K_{2n}} = \frac{\sqrt{1+\mathrm{K_n}^2}-1}{\mathrm{K_n}}\,.$$

Utilizzando la formula di Aryabhata e la formula qui ottenuta, si possono trovare i risultati sintetizzati nella seguente tabella, i quali danno certezza sui valori approssimati trovati e indicati nell'ultima colonna:

Tabella 4 – Calcolo di π con il metodo di Archimede

Numero n dei lati del poligono regolare	Perimetro del poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio 1	Perimetro del poligono regolare di n lati circoscritto ad una circonferenza di raggio 1	Valore approssimato di π corretto fino al decimale indicato
6	3	3,4	3
12	3,10	3,21	3
24	3,13	3,15	3,1
48	3,139	3,146	3,1
96	3,1410	3,1427	3,14
192	3,1414	3,1418	3,141
384	3,14155	3,14166	3,141
768	3,14158	3,14161	3,141
1536	3,1415904	3,1415970	3,14159
3072	3,1415921	3,1415937	3,14159
6144	3,14159251	3,14159292	3,141592
12.288	3,14159261	3,14159272	3,141592
24.576	3,141592645	3,141592672	3,1415926

Ribadisco comunque che, dopo la scoperta di Machin e con l'avvento dell'Analisi Matematica, non si seguì più questo procedimento e i ricercatori utilizzarono metodi più efficaci.