I teoremi del valor medio

di Antonino Giambò

1. Introduzione.

L'Analisi Matematica mostra l'esistenza di tre teoremi interdipendenti sulle funzioni derivabili, nel senso che, dimostrato uno qualsiasi di essi, gli altri due ne sono una diretta conseguenza.

Si tratta dei celebri teoremi di Rolle, Lagrange, Cauchy, i quali sono chiamati cumulativamente *teoremi del valor medio*, anche se spesso con questa denominazione ci si riferisce al solo teorema di Lagrange.

In questo contributo mi propongo di far vedere come i tre teoremi siano di fatto equivalenti, nel senso che affermino sostanzialmente la stessa cosa, pur con parole diverse.

Alcune riflessioni di carattere didattico concluderanno l'articolo.

2. Detto che, in ordine di successione temporale, per primo è stato enunciato il teorema di Rolle, seguito dal teorema di Lagrange e infine dal teorema di Cauchy, e detto inoltre che il teorema di Lagrange generalizza quello di Rolle e il teorema di Cauchy generalizza quello di Lagrange, ricordo questi enunciati:

- ***Teorema di Rolle*** (MICHEL ROLLE, matematico francese, 1652-1719):
  Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ e sia inoltre $f(a)=f(b)$: esiste almeno un punto $c\in]a,b[$ tale che $f'(c)=0$.
- ***Teorema di Lagrange*** (GIUSEPPE LUIGI LAGRANGIA [1], matematico italo-francese, 1736-1813):
  Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Esiste almeno un punto $c\in]a,b[$ tale che:
  $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\,. \qquad [1]$$
- ***Teorema di Cauchy*** (AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, matematico francese, 1789-1857), detto anche *teorema degli incrementi finiti*:
  Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$. Esiste almeno un punto $c\in]a,b[$ tale che:
  $$\big(g(b)-g(a)\big)\,f'(c)=\big(f(b)-f(a)\big)\,g'(c)\,. \qquad [2]$$

La dimostrazione della loro equivalenza è basata su due altri teoremi, dei quali mi limito a fornire gli enunciati:

- Uno è il *teorema di Weierstrass* (KARL WEIERSTRASS, matematico tedesco, 1815-1897):
  Ogni funzione $f(x)$, continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, ammette almeno un punto di massimo assoluto e almeno un punto di minimo assoluto in $[a,b]$.
- L'altro è citato a volte come *teorema di Fermat* (PIERRE DE FERMAT, matematico francese, 1601-1665):
  Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo aperto $]a,b[$ e sia c un punto di tale intervallo, nel quale $f(x)$ ammetta un estremo locale. Se $f(x)$ è derivabile in c allora $f'(c)=0$.

3. Prima di passare alla dimostrazione accennata, può essere utile qualche considerazione circa la ricerca dei punti in cui sono verificati i teoremi medesimi e che sono denominati, a seconda delle situazioni: *punto di Rolle* o *punto di Lagrange* o *punto di Cauchy*.

La ricerca di tali punti si riduce sostanzialmente alla risoluzione di un'equazione. Risoluzione che può essere semplice oppure, cosa assai più frequente, complicata. Ragion per cui spesso bisogna accontentarsi di soluzioni approssimate. Si tratta comunque di un fatto assolutamente banale sul piano concettuale.

Qualche esempio per comprendere meglio, lasciando a chi legge il compito eventuale di completare i calcoli.

---

[1] Era questo il suo nome originario, che poi cambiò in Joseph-Louis Lagrange, una volta trasferitosi in Francia.

- È data la funzione:
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x\,,$$
continua e derivabile in ogni x reale. Una volta accertato che $f(-2)=f(4)$, si può calcolare che nell'intervallo $]-2, 4[$ esistono due punti di Rolle, ottenuti risolvendo l'equazione:
$$f'(x)=0, \quad \text{vale a dire:} \quad x^2 - x - 3 = 0.$$
Precisamente i seguenti punti:
$$c_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \approx -1{,}3\,; \quad c_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2{,}3\,.$$
- È data la funzione:
$$f(x) = \ln x\,,$$
continua e derivabile in ogni x reale maggiore di 0. Cerchiamo i punti di Lagrange interni all'intervallo $]1, e[$, dove e è il numero di Nepero. Si trova un solo punto di Lagrange, $c = e-1 \approx 1{,}7$, ottenuto risolvendo l'equazione:
$$f'(x) = \frac{f(e) - f(1)}{e-1}\,, \quad \text{vale a dire:} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{e-1}.$$
- Sono date le funzioni:
$$f(x) = 1 - x - x^2\,, \quad g(x) = x^3\,,$$
continue e derivabili in ogni x reale. Cerchiamo i punti di Cauchy interni all'intervallo $]-1, 1[$. A conti fatti, si trova un solo punto di Cauchy, $c=-1/3$, ottenuto risolvendo l'equazione:
$$\big(g(1) - g(-1)\big)\, f'(x) = \big(f(1) - f(-1)\big)\, g'(x), \quad \text{vale a dire:} \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0\,.$$
L'altra radice dell'equazione, $x=1$, deve essere scartata poiché non appartenente all'intervallo $]-1, 1[$.

4. Equivalenza dei tre teoremi.

Possiamo adesso occuparci della dimostrazione dell'equivalenza dei tre teoremi. Lo faremo in base a questa sequenza di dimostrazioni:
- si dimostra il teorema di Rolle;
- ammesso Rolle, si dimostra il teorema di Cauchy;
- ammesso Cauchy, si deduce il teorema di Lagrange;
- ammesso Lagrange, si desume il teorema di Rolle.

Cosicché, con un percorso circolare, partendo dal teorema di Rolle e proseguendo con i teoremi di Cauchy e Lagrange, si perviene al teorema di Rolle.

È questo che fa dire che i tre teoremi sostengono sostanzialmente la stessa cosa e pertanto sono equivalenti.

- **Dimostrazione del teorema di Rolle**.

La dimostrazione data da Rolle, avvenuta nel 1691, riguardava solamente funzioni polinomiali e peraltro non utilizzava il calcolo differenziale, che Rolle a quell'epoca criticava. Noi, invece, non solo utilizzeremo questo calcolo ma non limiteremo la dimostrazione alle funzioni polinomiali.

Allora, siccome f(x) è, per ipotesi, continua nell'intervallo chiuso e limitato [a,b], in virtù del teorema di Weierstrass ammette massimo assoluto e minimo assoluto in [a,b]. Indichiamo questi valori rispettivamente con M ed m. Si possono presentare due casi, a seconda che f(x) assuma entrambi tali valori negli estremi dell'intervallo o se assume almeno uno di essi in un punto interno all'intervallo medesimo.
- Nel primo caso, siccome, per ipotesi, f(a)=f(b), deve essere M=m, per cui f(x) è costante su tutto l'intervallo e, di conseguenza, la sua derivata è nulla in ogni punto interno ad]a,b[.
- Nel secondo caso, ammesso che f(x) assuma il valore m in un punto c interno ad]a,b[, siccome per ipotesi la funzione è derivabile in]a,b[, in virtù del teorema di Fermat deve essere f '(c)=0. Stesso discorso se f(x) assume il valore M in c.

In ogni caso, esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che f '(c)=0. [c.v.d.]

- **Dimostrazione del teorema di Cauchy**.

È ammesso il teorema di Rolle.

Costruiamo la funzione ausiliaria h(x) tale che:

$$h(x) = [g(b)-g(a)]\, f(x) - [f(b)-f(a)]\, g(x)\ .$$

Essa risulta chiaramente continua in [a,b] e derivabile in]a,b[. Inoltre: $h(a)=h(b)$. Infatti:

$$h(a) = [g(b)-g(a)]\, f(a) - [f(b)-f(a)]\, g(a) = f(a)\, g(b) - f(b)\, g(a),$$
$$h(b) = [g(b)-g(a)]\, f(b) - [f(b)-f(a)]\, g(b) = f(a)\, g(b) - f(b)\, g(a).$$

Sono quindi soddisfatte per la funzione h(x), con $x \in [a,b]$, tutte le ipotesi del teorema di Rolle. Sicché esiste almeno un punto $c \in]a,b[$ tale che $h'(c)=0$. Siccome:

$$h'(x) = [g(b)-g(a)]\, f'(x) - [f(b)-f(a)]\, g'(x)$$

e, di conseguenza, mettendo c al posto di x:

$$h'(c) = [g(b)-g(a)]\, f'(c) - [f(b)-f(a)]\, g'(c)\ ,$$

deve essere:

$$[g(b)-g(a)]\, f'(c) = [f(b)-f(a)]\, g'(c)\ .$$

Che è ciò che si voleva dimostrare.

Se poi $g'(c) \neq 0$, in virtù del contronominale del teorema di Rolle, risulta $g(b) \neq g(a)$ e perciò $g(b)-g(a) \neq 0$. Si desume che l'uguaglianza precedente si può mettere nella seguente forma equivalente alla [2]:

[3] $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

- **Dimostrazione del teorema di Lagrange**.

È ammesso il teorema di Cauchy.

Il teorema di Lagrange ne è un corollario. Infatti, se nella [3] si pone $g(x)=x$, costatato che si ha: $g(b)=b$, $g(a)=a$, $g'(b)=1$, la formula diventa uguale alla [1].

Formula che esprime per l'appunto il teorema di Lagrange.

- **Dimostrazione del teorema di Rolle.**

È ammesso il teorema di Lagrange.

Il teorema di Rolle ne è a sua volta un corollario. Se infatti, nella [1] si pone $f(a)=f(b)$, risulta immediatamente $f'(c)=0$.

Per la cronaca, sembra che questo sia stato fatto notare per la prima volta da Cauchy nel 1823.

5. Significato geometrico dei tre teoremi.

Di ciascuno dei tre teoremi in esame è possibile stabilire un significato geometrico. Ce ne occupiamo.

- Una volta rappresentato il grafico della funzione f(x) in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) (figura 1), si traccia la retta s, passante per i punti di coordinate $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$, e quindi parallela all'asse x, essendo per ipotesi $f(a)=f(b)$. Il *teorema di Rolle* assicura che esiste almeno un punto del grafico, di ascissa c, interna all'intervallo]a,b[, nel quale la tangente t al grafico medesimo è parallela all'asse x. (Per la cronaca, in figura esistono due punti di Rolle).

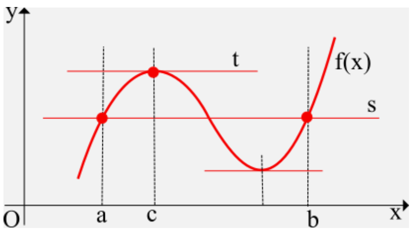

figura 1

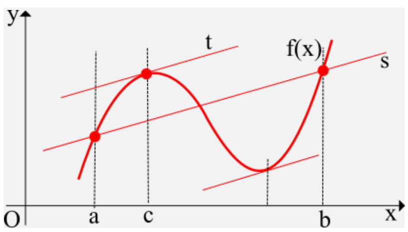

figura 2

- Una volta rappresentato il grafico della funzione f(x) in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) (figura 2), si traccia la retta s, passante per i punti di coordinate $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$. Il *teorema di Lagrange* assicura che esiste almeno un punto del grafico, di ascissa c, interna all'intervallo

]a,b[, nel quale la tangente t al grafico medesimo è parallela alla retta s. (Sempre per la cronaca, in figura esistono due punti di Lagrange).

Il teorema di Lagrange ha anche un interessante significato fisico, più esattamente un significato cinematico. Basta supporre che la funzione sia la legge oraria $s=s(t)$ di un moto che si svolge dalla posizione $s(a)$ alla posizione $s(b)$ senza soste né inversioni di marcia (figura 3), percorrendo lo spazio $s(b)-s(a)$ nell'intervallo di tempo [a,b]. Ebbene, costatato che la velocità media del moto in tale intervallo di tempo, ossia il rapporto fra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo, è:

$$v_m = \frac{s(b)-s(a)}{b-a},$$

il teorema di Lagrange assicura che esiste almeno un istante $c\in[a,b]$ in cui la velocità istantanea, cioè $s'(c)$, è esattamente uguale a v_m. (In figura, di tali istanti se ne contano due).

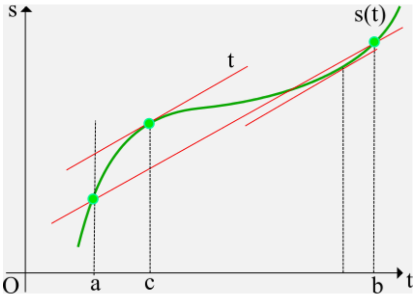

figura 3

- Del teorema di Cauchy si può fornire un duplice significato geometrico.
  Il primo, per la verità, non è proprio esaltante, ma lo descrivo lo stesso.
  Si rappresentano i grafici delle due funzioni f(x) e g(x) in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) (figura 4).

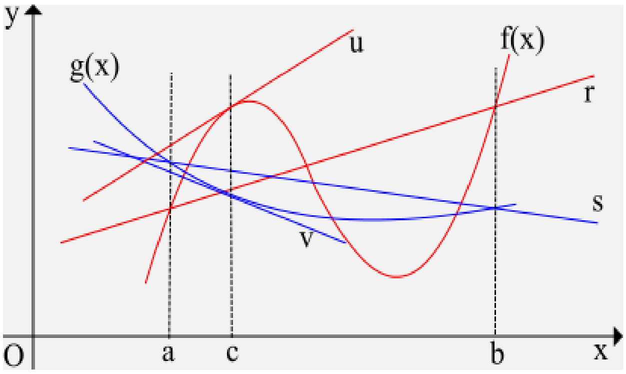

figura 4

Si tracciano quindi la retta r passante per i punti $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$, e la retta s passante per i punti $\big(a, g(a)\big)$ e $\big(b, g(b)\big)$. Le due rette hanno rispettivamente le seguenti pendenze:

$$m_r = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad m_s = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}.$$

Effettuando il rapporto membro a membro, si ottiene:

$$\frac{m_r}{m_s} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Il teorema di Cauchy, sotto l'ipotesi che sia $g'(c)\neq 0$, assicura l'esistenza di un punto di ascissa c, interna ad]a,b[, in cui il rapporto precedente è uguale ad $f'(c)/g'(c)$, vale a dire uguale al rapporto delle pendenze delle tangenti u, v ai due grafici nei rispettivi punti di ascissa c. Ossia:

$$\frac{m_r}{m_s} = \frac{m_u}{m_v}.$$

Per quanto riguarda il secondo significato geometrico del teorema di Cauchy, certamente più interessante del primo, conviene prendere in esame la curva γ di equazioni parametriche:

$$x = g(t),\ \ y = f(t)\ ,$$

ottenuta facendo variare il parametro t sull'intervallo [a,b]. È ben definita la cosiddetta "velocità" della curva in ogni suo punto $P\big(g(t), f(t)\big)$. Essa è precisamente il vettore di componenti cartesiane:

$$(g'(t), f'(t)),$$

la cui direzione ha come pendenza il rapporto:

$$\frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Ipotizziamo inoltre che la curva γ sia "regolare", ossia che il vettore velocità sia non nullo in ogni $t\in[a,b]$. Come dire che non è contemporaneamente: $g'(t)=0,\ f'(t)=0$.

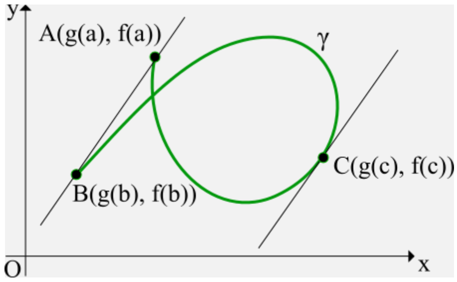

figura 5

Indicati con A e B i punti di γ di coordinate rispettivamente $\big(g(a), f(a)\big)$ e $\big(g(b), f(b)\big)$, possiamo costatare che la retta AB ha la seguente pendenza:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Orbene, il teorema di Cauchy, sotto la condizione $g'(c)\neq 0$, assicura che esiste su γ un punto $C\big(g(c), f(c)\big)$ nel quale la velocità della curva ha la direzione della retta AB (figura 5).

6. Riflessioni di natura didattica.

Mi sia concesso di esprimere un paio di considerazioni di natura didattica, rivolte ai docenti delle scuole secondarie.

- Quanto su esposto sull'equivalenza dei tre teoremi non presenta difficoltà concettuali di rilievo. Ragion per cui, tempo a disposizione permettendo, il docente può proporre l'argomento ai suoi studenti, soffermandosi sulle dimostrazioni e anche sui significati geometrico e fisico del teorema di Lagrange.

Circa l'uso dei tre teoremi nell'insegnamento/apprendimento dell'Analisi Matematica, dipende da ciò che si vuol fare. Per esempio, se si vuole procedere alla dimostrazione del teorema di De L'Hôpital (nel caso dell'indeterminazione 0/0), servono certamente sia il teorema di Rolle sia il teorema di Cauchy.

Si voglia invece dimostrare che condizione sufficiente affinché una funzione f(x), derivabile in un intervallo I, sia strettamente crescente in I è che risulti $f'(x)>0$ per ogni $x\in I$. Ebbene, in questo caso non si può prescindere dal teorema di Lagrange.

E così via.

- Giudico poi importante porre l'attenzione su alcuni fatti.

a) Anzitutto, con riferimento al teorema di Rolle, il fatto che solitamente un punto di Rolle è un punto estremante per la funzione può dare l'impressione che sia sempre così. Non lo è. Il punto infatti può essere un punto di flesso con tangente parallela all'asse x. Si consideri al riguardo la funzione seguente:

$$f(x) = x^3\left(\frac{3}{5}x + 1\right),$$

continua e derivabile in ogni x reale. Una volta accertato che f(– 2)=f(1), si può calcolare che nell'intervallo]–2,1[esistono due punti di Rolle, di cui uno (c'=–5/4) è un punto estremante, mentre l'altro (c"=0) è un punto di flesso con tangente orizzontale (figura 6). Si capisce che, fatte salve le ipotesi del teorema, esiste comunque almeno un punto di Rolle che è punto estremante per la funzione, quale che essa sia.

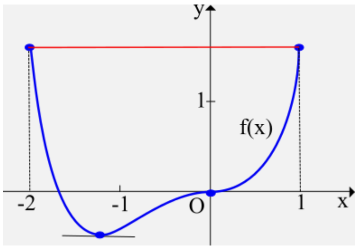

figura 6

b) Si consideri adesso che tutti e tre i teoremi del valor medio presuppongono le seguenti ipotesi comuni: le funzioni sono continue in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e sono derivabili nell'intervallo aperto $]a, b[$.

Si pone allora la seguente domanda: cosa accade se qualcuna di queste condizioni viene a mancare? La tesi del teorema che si considera è ancora vera?

Prendiamo, ma solo a titolo di esempio, il teorema di Lagrange.

Posto che cada o la condizione della continuità su $[a, b]$ o quella della derivabilità su $]a, b[$, esiste ancora un punto del grafico, di ascissa c interna all'intervallo]a,b[, nel quale la tangente t al grafico medesimo è parallela alla retta s?

Due funzioni, prese come esempi, mostrano chiaramente che un tale punto può non esistere [2].

- La funzione in cui viene meno la continuità sia la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per} \quad -1 \le x < 0 \\ 0 & per \quad x = 0 \\ 1 & \text{per} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

  Si costata che è continua in ogni punto dell'intervallo di definizione, fatta eccezione per il punto 0 nel quale presenta una discontinuità non eliminabile (figura 7).
  Ebbene, considerata la retta s passante per i suoi punti estremi, di coordinate $(-1, -1)$ e $(1, 1)$, si capisce che non esiste alcun punto della curva, in cui la tangente è parallela alla retta s.

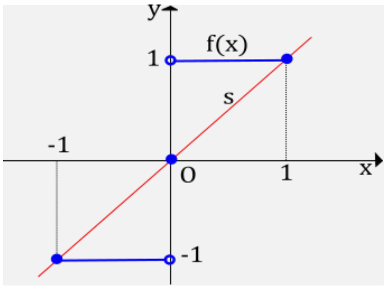

figura 7

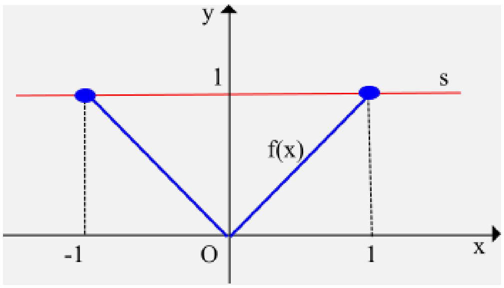

figura 8

- La funzione in cui viene meno la derivabilità sia la seguente:

$$f(x) = |x| \quad \text{con} \quad x \in [-1, 1] .$$

  Si costata che è continua e derivabile in ogni punto dell'intervallo di definizione, fatta eccezione per il punto 0 nel quale presenta un punto angoloso e pertanto non è ivi derivabile (figura 8).
  Ebbene, considerata la retta s passante per i suoi punti estremi, di coordinate $(-1, 1)$ e $(1, 1)$, anche adesso si capisce che non esiste alcun punto della curva, in cui la tangente è parallela alla retta s.

---

[2] Attenzione! Questo non significa che, venendo a cadere almeno una delle condizioni precisate, giammai esiste un punto di ascissa c∈]a,b[nel quale la tangente al grafico della funzione sia parallela alla secante s. Un tale punto può esistere a volte. Solo che questo non è garantito se le dette condizioni vengono a mancare.

c) Per quanto riguarda il secondo significato geometrico del teorema di Cauchy, si ipotizza che la curva γ sia “regolare”, ossia che non esista alcun $t \in [a,b]$ in cui il vettore velocità sia nullo. Se infatti così non fosse, potrebbe non esistere alcun punto della curva, in cui la retta tangente sia parallela alla retta AB.

A conferma di ciò, si considerino le due funzioni seguenti:

$$f(x) = 1 - x^2, \quad g(x) = x^3,$$

continue e derivabili in ogni x reale. Costruiamo la curva γ di equazioni parametriche:

$$x = t^3, \ \ y = 1 - t^2,$$

con t variabile nell’intervallo $[-1, 1]$.

Il suo grafico (figura 9), rappresentato in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, mostra che in nessun punto della curva la tangente è parallela alla congiungente i suoi estremi, che sono i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$. Di fatto c’è un punto sulla curva in cui il vettore velocità è nullo. Questo è il punto $(0,1)$.

In realtà, considerato che:

$$x'(t) = 3\,t^2, \ \ y'(t) = -2\,t,$$

risulta:

$$x'(0) = 0, \ \ y'(0) = 0.$$

Per l’appunto, essendo $(0, 0)$ le componenti cartesiane del vettore velocità, esso è proprio il vettore nullo.

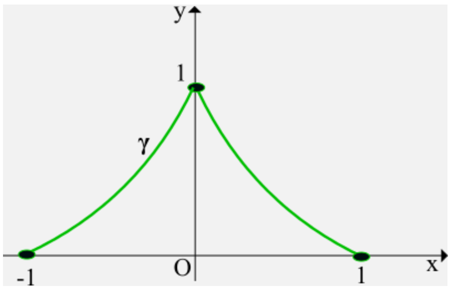

figura 9

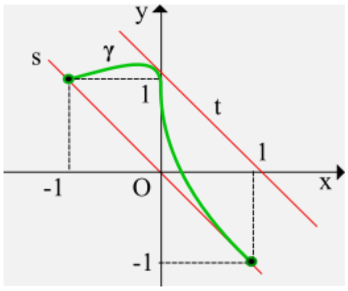

figura 10

Al contrario ed a conferma del teorema di Cauchy, sia la curva regolare γ (figura 10) di equazioni parametriche:

$$x = t^3, \ y = 1 - t - t^2, \quad \text{con } t \in [-1, 1],$$

ottenuta riprendendo le due funzioni esaminate in chiusura del precedente N° 3, ossia:

$$f(x) = 1 - x - x^2, \quad g(x) = x^3.$$

Ebbene, considerata la retta s, congiungente i suoi punti estremi $(-1, 1)$ e $(1, -1)$, la cui equazione è evidentemente $y=-x$, esiste, per $t \in]-1, 1[$, un punto di γ in cui la tangente alla curva è parallela alla retta s. Questo punto, ottenuto per $t = -1/3$, ha coordinate $\left(-\frac{1}{27}, \frac{11}{9}\right)$. Il valore di t si ottiene risolvendo l’equazione:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -1 \quad \text{ossia:} \quad \frac{-1 - 2t}{3\,t^2} = -1.$$

Si può notare che c’è un altro punto sulla curva γ, in cui la tangente ad essa è parallela alla retta s, anzi è proprio la retta s, ed è il punto $(1,-1)$, ottenuto per $t=1$, ma non si può accettare come punto di Cauchy poiché t non appartiene all’intervallo $]-1, 1[$. Cosa, peraltro, già rilevata a suo tempo.

BIBLIOGRAFIA.

[1] CARLOS OSWALDO SUÁREZ ALEMÁN, *Cauchy*, Milano, RBA Italia, 2018.
[2] LUIS FERNANDO AREÁN, *Lagrange*, Milano, Rba Italia, 2017.
[3] ERIC TEMPLE BELL, *I grandi matematici*, Firenze, Sansoni, 1966.
[4] CARL BENJAMIN BOYER, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1980.
[5] GHEORGHIJ EVGHENIEVIČ ŠILOV, *Analisi Matematica*, *Funzioni di una variabile*, Mosca, Mir, 1978.