Il triangolo mediale

di Antonino Giambò

1. In un recente articolo pubblicato su questa medesima rubrica (*Il triangolo ortico*) ho descritto alcune proprietà del triangolo avente per vertici i piedi delle altezze di un triangolo dato, detto appunto *triangolo ortico* o anche *triangolo delle altezze*.

In questo articolo mi occuperò invece delle proprietà del triangolo avente per vertici i punti medi dei lati di un triangolo dato, dicendo subito che questo nuovo triangolo sarà denominato *triangolo mediale* oppure *triangolo delle mediane* per analogia con l'altra denominazione del triangolo ortico.

Per comodità, mi riferirò al triangolo dato denominandolo *triangolo di riferimento*.

Le proprietà del triangolo mediale non sono intriganti come quelle del triangolo ortico, ma sono ugualmente interessanti.

Orbene, anticipando alcune delle proprietà che descriverò, dico subito che il triangolo mediale ha una analogia (forse una sola) con il triangolo ortico di uno stesso triangolo di riferimento: i vertici dei due triangoli sono situati su una medesima circonferenza, la circonferenza cosiddetta dei nove punti.

Ma molte sono, invece, le differenze. Per esempio, indipendentemente dal fatto che il triangolo di riferimento sia acutangolo o ottusangolo, il suo triangolo ortico può essere scaleno, isoscele o equilatero o ancora rettangolo, acutangolo o ottusangolo e solo in casi eccezionali risulta simile al triangolo di riferimento. Il triangolo mediale invece è sempre e comunque simile al triangolo di riferimento.

Altra differenza: mentre il triangolo ortico può essere parzialmente esterno al triangolo di riferimento, il triangolo mediale è sempre interno, eccezion fatta naturalmente per i vertici che sono sul contorno del triangolo di riferimento.

Ancora: mentre di un triangolo rettangolo non esiste un triangolo ortico, esiste invece il triangolo mediale.

Ad ogni modo, delle proprietà del triangolo ortico mi sono già occupato nell'articolo succitato e ad esso rimando.

2. Adesso ci occupiamo delle proprietà del triangolo mediale.

- PROPRIETÀ 1. Il triangolo mediale di un triangolo è il trasformato di questo triangolo mediante l'omotetia avente il centro nel baricentro del triangolo di riferimento e caratteristica $-1/2$.

DIMOSTRAZIONE. Considerato il triangolo ABC e tracciate le sue mediane AL, BM, CN, il triangolo mediale di ABC è il triangolo LMN (figura 1).

Bisogna ora ricordare che il baricentro di un triangolo, ossia il punto d'incontro delle sue mediane, divide ciascuna mediana in due parti di cui quella contenente il vertice è il doppio dell'altra.

Ebbene, indicato con G il baricentro del triangolo di riferimento, si ha evidentemente:

$$\overrightarrow{GL} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{GA}\,,\ \ \overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{GB}\,,\ \ \overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{GC}\,.$$

Cosicché i punti A, B, C, sono trasformati nei punti L, M, N. Effettivamente il triangolo mediale LMN è il trasformato del triangolo di riferimento ABC mediante l'omotetia di centro G e caratteristica $-1/2$.

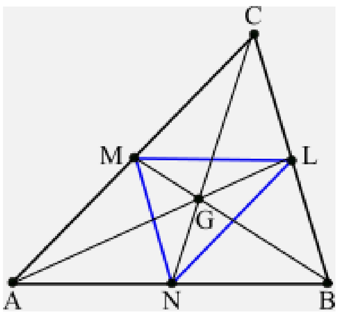

figura 1

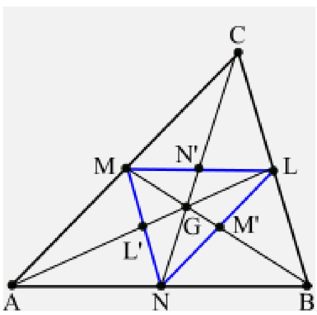

figura 2

- PROPRIETÀ 2. Il triangolo mediale e il suo triangolo di riferimento hanno lo stesso baricentro.

DIMOSTRAZIONE. In base alla precedente proprietà 1, questo è ovvio ed evidente, ma ne voglio fornire una dimostrazione alternativa.

Considerato allora il triangolo ABC (figura 2), sia G il suo baricentro. Dobbiamo dimostrare che G è anche il baricentro del triangolo mediale LMN.

Incominciamo a costatare che il punto L' in cui la mediana AL del triangolo ABC interseca il lato MN del triangolo mediale è punto medio di MN. Di fatto, il quadrilatero ANLM è un parallelogramma, per cui le sue diagonali si bisecano e dunque $ML'=L'N$.

Analogamente si dimostra che M' è il punto medio di LN e N' è il punto medio di ML.

Cosicché, i segmenti LL', MM', NN' sono le mediane del triangolo mediale LMN e le loro rette coincidono con le rette delle mediane AL, BM, CN del triangolo di riferimento. Dunque il punto d'incontro delle mediane dei due triangoli è lo stesso punto G.

- PROPRIETÀ 3. Il triangolo mediale di un triangolo è simile al triangolo di riferimento e lo divide in quattro triangoli uguali fra loro.

DIMOSTRAZIONE. Che il triangolo mediale sia simile al suo triangolo di riferimento è un'immediata conseguenza della proprietà 1, ove si consideri che l'omotetia è una particolare similitudine.

In virtù della medesima omotetia, la quale, come si sa, trasforma una retta in una retta parallela, risulta $AB \parallel ML$, $BC \parallel NM$, $CA \parallel LN$ e inoltre $\overline{ML}=\frac{1}{2}\,\overline{AB}$, $\overline{NM}=\frac{1}{2}\,\overline{BC}$, $\overline{NL}=\frac{1}{2}\overline{AC}$, (figura 1). Di conseguenza:

$$ML=AN=NB\,,\quad NM=BL=LC\,,\quad NL=AM=MC.$$

I quattro triangoli in cui il triangolo mediale divide il suo triangolo di riferimento, vale a dire i triangoli LMN, ANM, NBL, LCM, sono dunque uguali per il 3° criterio di uguaglianza dei triangoli.

- PROPRIETÀ 4. L'area del triangolo mediale è 1/4 dell'area del triangolo di riferimento.

DIMOSTRAZIONE. Discende come corollario della proprietà precedente.

- PROPRIETÀ 5. L'ortocentro del triangolo mediale di un triangolo coincide con il circocentro del triangolo di riferimento.

DIMOSTRAZIONE. Con riferimento alla figura sottostante (figura 3), è sufficiente costatare il semplice fatto che le rette delle altezze del triangolo mediale sono anche gli assi del triangolo di riferimento. Per cui, essendo l'ortocentro del triangolo mediale il punto d'incontro delle sue altezze ed essendo il circocentro del triangolo di riferimento il punto d'incontro degli assi, i due punti coincidono.

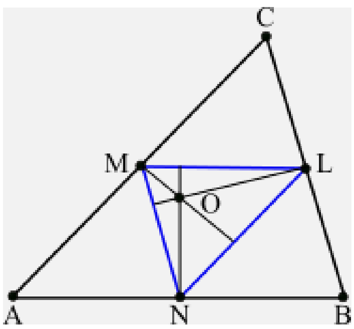

figura 3

- PROPRIETÀ 6. La circonferenza circoscritta al triangolo mediale è la circonferenza dei nove punti e, pertanto, è la stessa circonferenza circoscritta al triangolo ortico.

DIMOSTRAZIONE. Ho già esaminato, nell'articolo succitato, la situazione nei casi in cui il triangolo di riferimento è acutangolo o ottusangolo. Per cui rimando a quell'articolo. Qui intendo soffermarmi sul caso in cui il triangolo di riferimento è rettangolo, poiché si presenta una situazione particolare, quantunque banale.

In realtà, in questo caso, i famosi nove punti … si riducono drasticamente a cinque.

Vediamo come e perché.

Sia allora il triangolo ABC, rettangolo in A (figura 4).

- I tre punti medi dei lati ci sono tutti: sono i punti L, M, N.
- I piedi delle altezze del triangolo si riducono a due: sono i punti A ed H. Infatti i piedi delle altezze condotte per B e per C cadono entrambi nel punto A, che è anche l'ortocentro del triangolo ABC. Per la cronaca, il triangolo ortico degenera nel segmento AH.
- I punti medi dei segmenti che congiungono l'ortocentro A del triangolo ABC con i suoi vertici non sono altro che i punti A, M, N. Essi sono infatti i punti medi dei segmenti AA, AC, AB nell'ordine.

La circonferenza, che continuiamo a denominare di Feuerbach, passa per i cinque punti L, M, N, A, H.

Che essa passi per i punti L, M, A, N è evidente, essendo LMAN un rettangolo. È pure evidente che passa per H, dal momento che il triangolo ALH è rettangolo in H e quindi inscritto nella circonferenza di diametro AL, che è per l'appunto la circonferenza in questione.

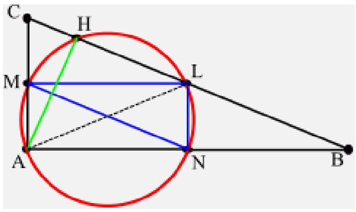

figura 4

3. Qualche curiosità sulla *circonferenza* (o *cerchio*) *dei nove punti*.

Dico subito che in fondo dovrebbe ritenersi inappropriata la denominazione di *cerchio di Feuerbach* (1) che si dà al cerchio dei nove punti dal momento che il cerchio dei nove punti era già cosa nota, anche se solo da un paio d'anni. Quasi certamente l'attribuzione, ormai comunque universalmente accettata, è dovuta al fatto che Feuerbach scoprì un'importante caratteristica di quel cerchio.

Ma procediamo con ordine.

Già Eulero (2) aveva dimostrato nel 1765 che il triangolo mediale e il triangolo ortico sono inscritti nel medesimo cerchio, per cui sei dei nove punti notevoli sono coinvolti: i punti medi dei lati del triangolo e i piedi delle sue altezze. Ed è per questo motivo che alcuni chiamano *cerchio di Eulero* questo cerchio.

Successivamente, nel 1820 compare un articolo di Brianchon (3) e Poncelet (4) che contiene la dimostrazione che il cerchio che passa per i sei punti di Eulero passa anche per i punti medi dei segmenti che congiungono l'ortocentro del triangolo con i suoi vertici. Per la prima volta si parla di "cerchio dei nove punti".

Appena due anni dopo, nel 1822, un giovanissimo Feuerbach pubblica in tedesco un libriccino di poco meno di 100 pagine, dal titolo che, tradotto in italiano, suona così: *Proprietà di alcuni strani punti del triangolo rettilineo e delle sue linee e figure*. Si occupa in esso del cerchio dei nove punti, ma soprattutto enuncia e dimostra il seguente teorema che poi è quello che lo rese celebre:

TEOREMA 1 DI FEUERBACH: *Il cerchio che passa per i piedi delle altezze di un triangolo tocca tutti e quattro i cerchi che sono tangenti alle rette dei tre lati del triangolo: è tangente internamente al cerchio inscritto nel triangolo ed è tangente esternamente ai tre cerchi ex-inscritti*.

Si ricorda che un cerchio si dice ex-inscritto ad un triangolo se è tangente ad uno dei suoi lati e ai prolungamenti degli altri due.

In figura (figura 5), H, K, L sono i piedi delle altezze del triangolo ABC, mentre X, T_1, T_2, T_3 sono i punti di contatto del cerchio passante per i piedi suddetti (vale a dire il cerchio dei nove punti) con i cerchi tangenti alle rette dei lati del triangolo.

Il punto X nel quale si toccano il cerchio inscritto nel triangolo ABC di riferimento e il cerchio dei nove punti è denominato *punto di Feuerbach*.

---

[1] Karl Wilhelm Feuerbach, matematico tedesco, 1800-1834.

[2] Leonhard Euler, matematico svizzero, 1707-1783.

[3] Charles Julien Brianchon, matematico francese, 1783-1864.

[4] Jean Victor Poncelet, matematico francese, 1788-1867.

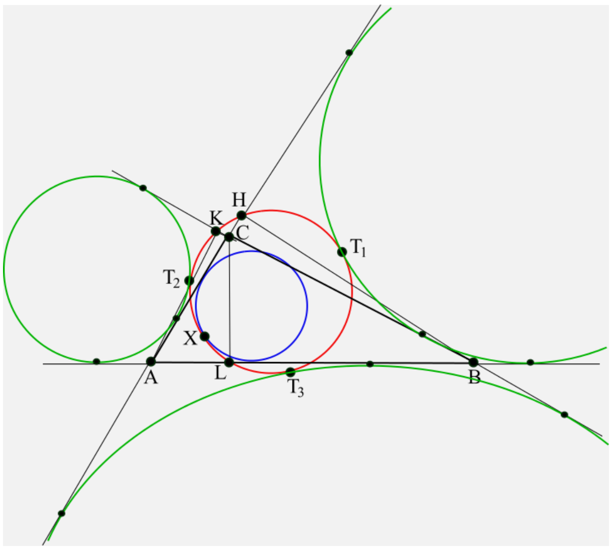

figura 5

Feuerbach dimostrò anche quest'altro teorema:

TEOREMA 2 DI FEUERBACH. *Il centro* W *del cerchio dei nove punti appartiene alla retta di Eulero ed è il punto medio del segmento avente per estremi l'ortocentro* O *del triangolo di riferimento e il suo circocentro* Q (figura 6).

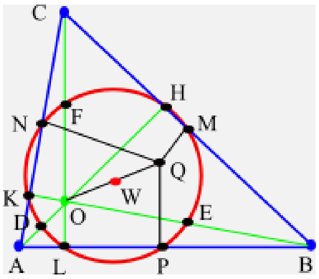

figura 6

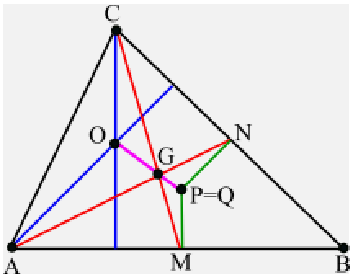

figura 7

4. Concludo con un cenno alla retta di Eulero, chiamata in causa, giusto per portare la cosa a conoscenza di quei pochi che per ventura ignorassero di cosa si sta parlando.

Si tratta semplicemente di enunciare e dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA. L'ortocentro O, il baricentro G e il circocentro Q di un triangolo sono situati su una medesima retta (***retta di Eulero***) e inoltre OG = 2 GQ.

DIMOSTRAZIONE. Considerato il triangolo ABC (figura 7), disegniamo il baricentro G (punto d'incontro delle mediane) e l'ortocentro O (punto d'incontro delle altezze). Indicato con M il punto medio del lato AB, intanto è evidente che G appartiene alla mediana CM ed è noto che risulta CG = 2 GM.

Prolunghiamo ora il segmento OG di un segmento GP tale che OG = 2 GP. Si desume che i due triangoli CGO e MGP si corrispondono in una omotetia di centro G. Siccome le rette CO ed MP si corrispondono in tale omotetia e siccome rette corrispondenti in un'omotetia sono parallele, ne consegue che CO è parallela a MP e perciò MP, come CO, è perpendicolare ad AB. Il che significa che la retta MP è l'asse del lato AB del triangolo ABC.

In maniera analoga, indicato con N il punto medio del lato BC e ragionando sui triangoli GAO e GNP, si dimostra che la stessa omotetia precedente associa tali triangoli e, inoltre, che la retta NP è l'asse del lato BC.

Il punto P è, quindi, proprio il circocentro Q del triangolo ABC. Ragion per cui i punti O, G, Q sono allineati e inoltre, come CG = 2 GM, è pure: OG = 2 GQ.

Come volevasi dimostrare.

Riepiloghiamo. Se la retta di Eulero di un assegnato triangolo è assunta come retta cartesiana Ox, avente l'origine nell'ortocentro O del triangolo e il punto unità nel circocentro Q, per cui $x_O=0$ e $x_Q=1$, si ha allora: $x_G=2/3$ e $x_W=1/2$, essendo G il baricentro del triangolo e W il centro del cerchio di Feuerbach (figura 8).

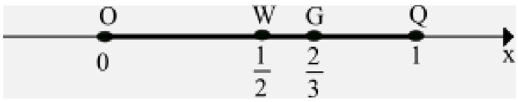

figura 8