Adriana Lanza

ESISTE L'INFINITO? E COME?

"Il credere l'universo infinito è un'illusione ottica: almeno tale è il mio parere. Non dico che possa dimostrarsi rigorosamente in metafisica, o che si abbiano prove di fatto, che egli non sia infinito; ma prescindendo dagli argomenti metafisici, io credo che l'analogia materialmente faccia molto verisimile che la infinità dell'universo non sia che illusione naturale della fantasia. Quando io guardo il cielo, mi diceva uno, e penso che al di là di qué corpi ch'io veggo, ve ne sono altri ed altri, il mio pensiero non trova limiti, e la probabilità mi conduce a credere che sempre vi sieno altri corpi più al di là, ed altri più al di là. Lo stesso, dico io, accade al fanciullo, o all'ignorante, che guarda intorno da un'alta torre o montagna, o che si trova in alto mare. Vede un orizzonte, ma sa che al di là v'è ancor terra o acqua, ed altra più al di là, e poi altra; e conchiude, o conchiuderebbe volentieri, che la terra o il mare fosse infinito."

Questa riflessione di Giacomo Leopardi, nel suo celebre Zibaldone(1827), fa pensare che l'infinito sia solo un' illusione o forse una nostra esigenza, una sensazione che nasce non appena incontriamo un confine che limita la nostra libertà di indagine.

Tutte le nostre esperienze sono indiscutibilmente finite ma il concetto di infinto esiste nella nostra mente, sia come possibilità di infiniti processi iterativi (infinito potenziale), sia nel pensare ad insiemi infiniti (infinito attuale).

In ambito matematico è frequente il passaggio dal finito all'infinito, non solo nelle note procedure di passaggio al limite o nell'ampliamento del piano euclideo con «i punti all'infinito». La problematica dell'infinito ha accompagnato l'evoluzione del pensiero matematico, dalla scoperta delle grandezze incommensurabili al metodo di esaustione di Eudosso e al rigore di Euclide, dai metodi euristici di Archimede alla potenza del calcolo infinitesimale, fino al "Paradiso" di Cantor e all' indecidibilità di Gödel.

Possiamo affermare che in matematica l' infinito è presente sotto diversi aspetti , purchè si possa disporre di assiomi e definizioni adeguate.

Aristotele, sosteneva che l'infinito in matematica non è necessario, in quanto i matematici si servono solo di quantità finite, anche se arbitrariamente grandi, o di costruzioni ripetute, quante volte si voglia. Al contrario, il ricorso all'infinito conferisce al pensiero matematico la capacità di generalizzare e formalizzare, come si può riscontrare nelle parole di Ennio De Giorgi *:*

«Il matematico si accorge per esempio che per riuscire a trattare alcuni problemi pratici occorre immergerli in un quadro ideale molto vasto. Un semplice esempio ci viene dall'aritmetica nessun calcolo numerico utilizzerà numeri con un milione di cifre, in realtà tutti i calcoli si arrestano molto prima; tuttavia è impossibile fare una teoria

dell'aritmetica semplice, pratica e coerente in cui non vale il teorema "esistono infiniti numeri primi". La matematica è in un certo senso costretta a immergere la realtà finita e visibile in un quadro infinito sempre più esteso; l'ordine delle cose può essere concepito solo come un intreccio di relazioni tra enti materiali e ideali che nel loro complesso formano una rete infinita». (Da Ennio De Giorgi, *Dizionario interdisciplinare scienza fede)*.

Una dimostrazione deduttiva sostituisce infinite verifiche, una dimostrazione per induzione riesce a compendiare in una formula infiniti sillogismi.

Per rispondere in modo esaustivo alla domanda iniziale dobbiamo però affrontare anche il problema dell'esistenza dell'infinito nella realtà che ci circonda.

Sappiamo che i fisici, al contrario dei matematici, non accettano una convivenza con l'infinito e che, ogni qualvolta sembrava insinuarsi, sono riusciti a evitarlo modificando l'impianto teorico.

Agli inizi del '900 Max Planck avanzò la prima ipotesi quantistica che, oltre a fornire la corretta legge di distribuzione del "corpo nero", evitava la "catastrofe ultravioletta", cioè la predizione che un corpo nero in equilibrio termico con l'ambiente avrebbe dovuto emettere una radiazione elettromagnetica di potenza infinita.

In tempi più recenti, il Modello Standard presenta alcune criticità dovute al carattere puntiforme delle particelle elementari.

Secondo alcuni fisici, alcune divergenze ossia probabilità di valore infinito, che nella teoria quantistica dei campi non sono eliminabili, potrebbero essere superate supponendo che gli oggetti fisici elementari non siano, come nella teoria dei campi, puntiformi, bensì siano oggetti spazialmente estesi (Teoria delle stringhe).

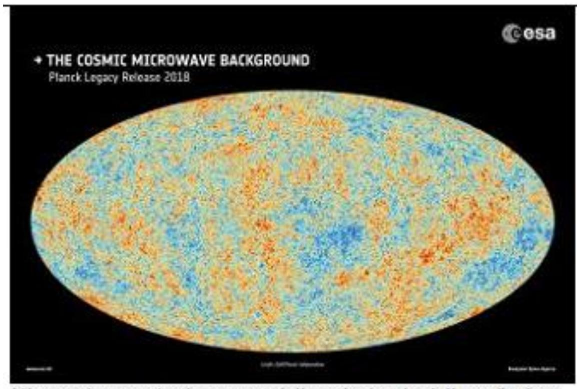
Un'eccezione è stata fatta per la Cosmologia, dove la comparsa di modelli di spazi infiniti è stata giudicata inevitabile.

Dal punto di vista della Cosmologia osservativa non è interessante chiedersi se l'intero universo sia finito o infinito, in quanto l'oggetto di indagine è solo la "parte visibile". l'Universo osservabile è, infatti, una sfera ipotetica, con al centro l'osservatore, il cui raggio è uguale alla distanza percorsa dalla luce nel tempo che ci separa dal Big Bang, tenuto conto anche della concomitante espansione dell'Universo.

Se invece ci riferiamo all'esistenza di un confine intrinseco dell'universo dobbiamo prendere in considerazione le soluzioni cosmologiche delle equazioni della Teoria Generale della Relatività di Einstein .

Queste descrivono un universo in espansione (o in contrazione, ma sappiamo dalle osservazioni che non è oggi questo il caso) dotato di curvatura spaziale negativa, nulla o positiva, a seconda del valore di un parametro legato alla densità di energia (quindi anche di materia) dell'universo.

Si tratta sempre, inoltre, di soluzioni a carattere locale e non definiscono le caratteristiche globali dello spaziotempo. Numerose "varianti" topologiche di spazio



L'immagine mostra la mappa delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo a microonde (Cmb) osservate dalla missione Planck dell'Esa

a tre dimensioni possono essere utilizzate per costruire dei modelli di universo pertinenti, cioè compatibili sia con la Relatività che con le osservazioni.
I risultati delle indagini sulla radiazione cosmica di fondo, legate alle rilevazioni del satellite Planck, sono ancora oggetto di studio per cosmologi e astrofisici .
La misura della curvatura del nostro spazio, a partire dalle anisotropie presenti nella radiazione cosmica di fondo, è abbastanza semplice concettualmente ma ovviamente richiede la gestione di molti parametri e incertezze nella lettura dei risultati.
Dopo i primi risultati del 2019 che riportavano una curvatura positiva, sono state avanzate ipotesi di correzioni verso una curvatura nulla.
L'universo è finito o infinito? I risultati sperimentali non sono ancora in grado di dare una risposta definitiva. Possiamo però chiederci come la matematica, che affronta il problema "dell' infinitamente grande" e "dell'infinitamente piccolo", può offrire supporto alla Fisica e alla Cosmologia nell'indagine sulla struttura dello spazio in cui viviamo.
Dal punto di vista didattico, pensando ad un percorso scolastico più ampio, è importante osservare come i rapporti tra Matematica e Cosmologia non vadano ridotti solo all'utilizzo di strumenti geometrici o analitici; vanno bensì individuati nell'ambito delle grandi opposizioni dialettiche, finito e infinito, limitato e illimitato, discreto e continuo, locale e globale, che affiancano le opposizioni classiche del pensiero filosofico, quali essere e divenire, eterno e cadùco.

IL DUALISMO FINITO/ INFINITO NEL PENSIERO COSMOLOGICO

Aspetti filosofici

Nel pensiero antico possiamo riconoscere due possibili risposte relative al dualismo finito/infinito in ambito cosmologico:

- L'universo è finito perché questo corrisponde ad una precisa esigenza razionale, metafisica o religiosa (Platone, Aristotele, Tolomeo, San Tommaso d'Aquino)

- L'universo è necessariamente infinito perché solo così si può giustificare e spiegare il mondo reale (Epicuro e gli atomisti in generale)

E' noto che concezione platonica-aristotelica di un universo chiuso, finito, gerarchicamente ordinato, è prevalsa sull'ipotesi atomista ed è rimasta in auge fino alla rivoluzione copernicana . Nel XVI secolo , sull'onda della polemica antiaristotelica, si assiste al rifiorire del platonismo e del pitagorismo e alla riscoperta dell'atomismo di Democrito e di Epicuro, attraverso il "De Rerum Natura" di Lucrezio; a quest'ultimo certo si ispirarono i filosofi della natura, specialmente Telesio e Bruno. La nuova Fisica, inoltre, non ammetteva distinzione tra corpi celesti e corpi terrestri. Tutti i fenomeni avvengono su un immenso palcoscenico dove non c'è posto per luoghi naturali o luoghi privilegiati, si affaccia una concezione dello spazio omogeneo e isotropo e necessariamente infinito.

Ritornano in auge anche le antiche obiezioni dei primi atomisti alla concezione di un universo finito :

<u>Prima obiezione</u> : Se l'universo è finito , cosa c'è oltre i suoi confini?
Se una freccia raggiunge i confini dell'universo, cosa le succede? *" quid telo denique fiet?"* (paradosso di Archita di Taranto riportato in forma poetica da Lucrezio nel primo libro del "De rerum natura").

Lucrezio- incisione pubblicata nell'edizione londinese del De rerum natura (1713) curata da M.Mmaittaire.

«...hoc pacto sequar atque, oras ubi cumque locaris
extremas, quaeram: quid telo denique fiet?
fiet uti nusquam possit consistere finis
effugiumque fugae prolatet copia semper.>>

Giordano Bruno, sostenitore dell'infinità dell'universo, affermava
<<Noi diciamo che possiamo cogliere col senso l'infinità dell'Universo, perché il senso sposta sempre il centro dell'orizzonte verso la periferia dell'orizzonte così che fa essere centro qualsiasi punto della periferia».

<u>Seconda obiezione</u> : Se l'universo fosse limitato, la materia, per effetto del suo peso si concentrerebbe in un sol punto lasciando vuoto lo spazio rimanente. Questo impedirebbe l'aggregazione degli atomi precludendo ogni forma di vita e di realtà.

Anche **Newton***, sostanzialmente , fu costretto a ipotizzare un universo infinito per superare il paradosso di un universo instabile, destinato a collassare per effetto della forza di gravità. Essendo l'universo infinito, dice Newton, ciascuna massa è attratta con uguale intensità in tutte le direzioni, rimanendo così in equilibrio.*
Questa concezione, che in realtà non aveva una formulazione matematica coerente, fu, come sappiamo, confutata e superata da Einstein nel XX secolo .

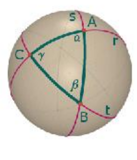
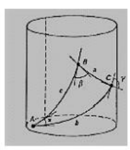
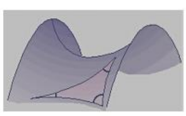
Il contributo dei matematici. Gauss e Riemann

Nel 1828 **Gauss** pubblicò l'opera *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, che segna la nascita della geometria differenziale in senso moderno, in cui sono studiate le proprietà geometriche intrinseche di una superficie – in altre parole, le proprietà indipendenti dallo spazio ambiente in cui essa è immersa – e si sviluppano procedimenti per mettere in relazione la descrizione locale della superficie con le sue caratteristiche globali.
Dal punto di vista sintetico, il principale, e più innovativo, strumento teorico introdotto da Gauss è la *mensura curvaturae*, oggi detta curvatura gaussiana , anch'essa di natura intrinseca , anche se la sua definizione presuppone che la superficie sia immersa in uno spazio tridimensionale.

Definizione:

Gauss determinò la curvatura intrinseca nel modo seguente: si individua la retta normale alla superficie in un punto. Poi si considerano tutti i piani incernierati su tale retta: essi sezioneranno la superficie dando luogo a linee diverse, ciascuna caratterizzata da un cerchio osculatore di raggio R e da una curvatura 1/R . Un teorema dovuto ad Eulero afferma che i piani che individuano la massima curvatura e quella minima (dette curvature principali) sono perpendicolari e Gauss definì la curvatura (gaussiana) della superficie come il prodotto delle curvature principali. In formula: $\mathrm{k} = \frac{1}{\mathrm{R}_1}\frac{1}{\mathrm{R}_2}$. Alla curvatura sono collegate alcune discrepanze tra le figure tracciate sulla superficie e le figure analoghe tracciate su un piano .

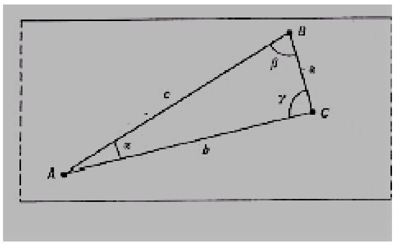
Proprietà: *Su una qualunque superficie,l'integrale della curvatura su un triangolo i cui lati sono archi di geodetica è uguale alla somma degli angoli interni del triangolo diminuita di* π

		
La sfera :Curvatura positiva	Il cilindro :Curvatura nulla	Paraboloide iperbolico: Curvatura negativa

$\int\int_T k_G dA \;= \alpha + \beta + \gamma - \pi$ *(eccesso angolare)*
Se due superfici si possono trasformare l'una nell'altra in modo che siano conservate le ampiezze degli angoli e le lunghezze delle

curve, allora le rispettive curvature sono uguali .
La curvatura gaussiana è invariante per le isometrie **(il celebre Theorema egregium di Gauss**) e resta invariata se una superficie (intuitivamente assimilata a un foglio flessibile ma inestensibile) viene deformata senza stiramento , né lacerazioni. Il cilindro ha curvatura intrinseca nulla, come il rettangolo con il quale può essere costruito facendo coincidere due lati opposti.
Sviluppando la superficie cilindrica in un piano si riconosce facilmente la metrica euclidea.

Nel 1854 **Riemann** presentò, presso la Facoltà di Filosofia dell'Università di Gottinga, la sua dissertazione di abilitazione per conseguire la libera docenza sul tema ,"Sulle ipotesi che stanno a fondamento della Geometria".
Allievo di Gauss, sviluppando e soprattutto generalizzando le idee del maestro mette a fondamento della geometria una nuova nozione, generale e astratta, la nozione di grandezza molteplicemente estesa, molteplicità o **varietà** secondo l'uso attuale del termine.



L'idea centrale di Riemann è partire da un concetto generale di grandezza su cui fondare la geometria di Euclide e tutte le altre geometrie possibili, definendo e scegliendo in modo opportuno le proprietà metriche.
La varietà è uno spazio "in sé che non eredita la sua geometria da uno spazio ambiente in cui sia immerso

- è multidimensionale
- euclideo a piccola scala, ma non necessariamente a grande scala
- generalizza la teoria intrinseca delle superficie di Gauss
  (curvatura Gaussiana _→ tensore di Riemann

Una varietà **X** si definisce di dimensione $\boldsymbol{n}$ se è localmente simile a $\boldsymbol{R^n}$.
Riemann distingue con chiarezza le proprietà topologiche da quelle metriche**.** Le prime , qualitative, sono legate all'estensione, le seconde , quantitative, si basano sulla possibilità di effettuare misure . Per **metrica** si intende una regola per determinare la "velocità" lungo le curve o per misurare la distanza tra due punti.
Da un punto di vista topologico la struttura locale di una varietà non è significativa, mentre le proprietà metriche possono evidenziare le differenze tra una varietà e un'altra.

La metrica euclidea si fonda sul teorema di Pitagora e porta alla validità di tutte le proprietà della Geometria di Euclide. Poiché la curvatura è legata all'eccesso angolare, segue che alle superfici aventi curvatura nulla è associata una metrica euclidea, alla curvatura positiva è associata a una geometria ellittica e a alla curvatura negativa è associata una geometria iperbolica.

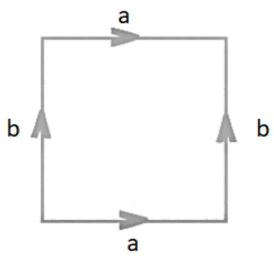
Una stessa varietà è suscettibile di metriche diverse, è possibile pertanto costruire una famiglia incredibilmente vasta di spazi sui quali fondare solidamente la geometria.
Per quanto riguarda il **dualismo finito/ infinito**, Riemann affronta il problema in modo del tutto nuovo , mettendo in evidenza l'importanza di distinguere l'illimitato dall'infinito, cioè l'assenza di confini dall'infinitezza; la prima appartiene alle relazioni di estensione, la seconda alle relazioni metriche; dalla prima proprietà non discende necessariamente la seconda, come si può osservare in una superficie sferica immersa in uno spazio a tre dimensioni. Un essere bidimensionale che si sposti su di essa potrebbe continuare nel suo viaggio senza mai incontrare un punto di arresto.
In uno spazio finito ma privo di bordo, l'intraprendente arciere di Archita potrebbe continuare a scagliare il suo dardo allontanandosi senza alcun limite.
Se allo spazio si attribuisce una curvatura costante e positiva, per quanto piccola, si possono prolungare le linee di minima lunghezza, a partire da un determinato punto ritornando al punto di partenza.

Potremo tradurre così, in linguaggio matematico, l'affermazione di Giordano Bruno:
Ogni punto di una varietà senza bordi possiede un intorno sferico che ci permette di misurare la distanza tra due punti nelle tre direzioni spaziali.
Questo però non esclude che, proseguendo sempre nella stessa direzione, la successione di intervalli, tutti di uguale lunghezza, non sia finita e che dopo un certo numero di passi non si torni nel punto di partenza.

Da quanto finora osservato discende che lo spazio fisico in cui viviamo è una particolare varietà triestesa a curvatura costante(per assicurare l'indipendenza della forma dei corpi dalla loro posizione).
La geometria non può dirci se viviamo uno spazio finito o infinito ma studia le diverse possibilità , le diverse forme globali che esso potrebbe assumere a partire dalle proprietà locali , le sole che l'esperienza empirica ci permette di verificare.

Se estrapoliamo i risultati <<nell'infinitamente grande>> non saremo mai sicuri della loro precisione (come aveva osservato anche Lobaceskij a conclusione dei suoi tentativi di verificare la validità della geometria euclidea con la triangolazione Terra-Sole-Sirio).
Se ci spostiamo però «nell'infinitamente piccolo» dove perdono significato i concetti empirici sui quali si fonda la possibilità di effettuare misure, ossia i corpi rigidi e i raggi di luce, Riemann afferma che «*Il problema della validità dei postulati della geometria nell'infinitamente piccolo si collega con il problema del fondamento intrinseco delle relazioni metriche dello spazio. In tale problema, che si può ben annoverare nello studio dello spazio, si viene ad utilizzare l'osservazione prima fatta, che in una molteplicità discreta il principio delle relazioni metriche è contenuto nel*

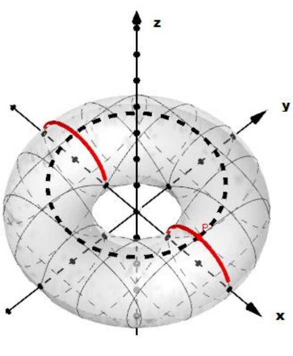
concetto stesso di questa molteplicità, mentre nel caso di una continua questo deve venire da fuori.
Quindi o la realtà che sta alla base dello spazio costituisce una molteplicità discreta, oppure il fondamento delle relazioni metriche va cercato fuori, in forze di legame che agiscono su di esso.»
La conclusione di Riemann sembra anticipare, pertanto, alcune idee centrali della Relatività Generale.
Einstein individuò, peraltro, nella Geometria di Riemann e negli ulteriori sviluppi nel Calcolo tensoriale di Ricci-Curbastro, gli strumenti matematici adatti per scrivere la sua equazione fondamentale che lega tra di loro le proprietà metriche dello spazio con il contenuto di massa-energia.
Le soluzioni, di tipo locale, non determinano la topologia globale, ma ne regolano le possibili scelte.



Un universo piatto.
Gli ultimi risultati della missione spaziale Planck sembrano indicare che la curvatura del nostro universo spaziale sia nulla. Torneremo al nostro vecchio, piatto ma infinito spazio euclideo ? Non è detto.
Un esempio di varietà triestesa, finita, priva di bordi e con curvatura nulla è il toro topologico di dimensione 3 .Per comprenderne la struttura ragioniamo prima in dimensione 2.
E' noto che una circonferenza appartenente al piano xz, con centro nel punto $C\ (R,0,0)$ e raggio $r\ (essendo\ R > r > 0)$ genera, in una rotazione completa intorno all'asse z, la superficie T di equazioni $\begin{cases} x = (R + r\cos u)\ \cos v \\ y = (R + r\cos u)\ \sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$ $u, v \in [0,2\pi[\times [0,2\pi[$

dalla caratteristica forma ad anello, il toro di dimensione 2.

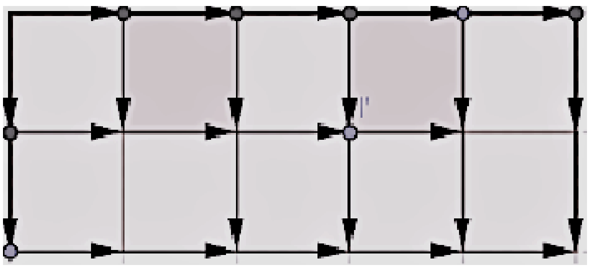
Dal punto di vista topologico, T è equivalente all'insieme prodotto di due curve semplici chiuse, per esempio due circonferenze $(S^1 \times S^1)$ corrispondenti rispettivamente a un meridiano e a un parallelo.



Il $2toro$, superficie immersa in $\boldsymbol{R^3}$,ha curvatura totale uguale a zero, mentre i suoi punti possono avere curvatura positiva, negativa o nulla.
Si dimostra però che , tramite le equazioni parametriche, è possibile costruire un omeomorfismo (corrispondenza biunivoca e

bicontinua) tra i punti del 2-toro e i punti di un quadrato , *il dominio fondamentale*, in cui siano stati identificati i lati opposti.

Intuitivamente: piegando un quadrato di materiale flessibile in modo da far coincidere due lati opposti si ottiene un cilindro limitato e facendo poi coincidere i due bordi del cilindro si ottiene una varietà compatta priva di bordi e a curvatura nulla.



Matematicamente queste operazioni consistono nel costruire una relazione di equivalenza tra i punti del quadrato, per cui due punti interni sono equivalenti se coincidono, mentre due punti del bordo sono equivalenti se giacciono su lati opposti e hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata .

Lo spazio quoziente , rispetto alla suddetta relazione di equivalenza è il toro topologico di dimensione 2, varietà finita e priva di bordo.

Se si attraversa un lato si emerge dal lato opposto, come accadeva nei videogame in voga qualche decennio fa o come si osserva nell'ambiente Netlogo.

Questa sarebbe quindi la risposta all'interrogativo i Lucrezio *" quid telo denique fiet? "*

C'è però un altro modo di realizzare questo tipo di costruzione :immaginiamo di piastrellare l'universo replicando all'infinito il dominio fondamentale

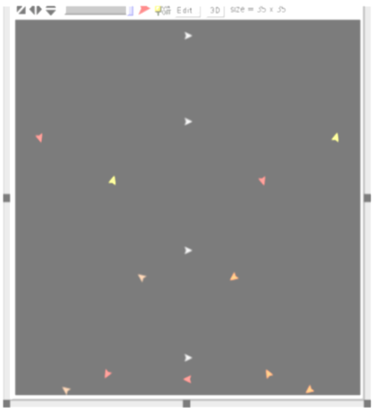
Ogni volta che un viaggiatore attraversa il bordo del quadrato emerge nella stessa situazione di partenza, replicandosi all'infinto .

Dal punto di vista matematico è spontaneo passare alla dimensione 3 e ottenere il 3-toro. prodotto di tre circonferenze $S^1 \times S^1 \times S^1$:

basta partire da un cubo o un parallelepipedo , e identificare le facce tra loro opposte.

Anche in questo casi possiamo pensare di replicare il dominio fondamentale per cui, muovendosi nelle tre direzioni fondamentali, non appena si giunge su una delle pareti, si emerge dalla parete opposta.

Questo suggerisce la ricerca di eventuali immagini multiple delle galassie, ancora non riscontrate ,che confermerebbero la validità del modello.



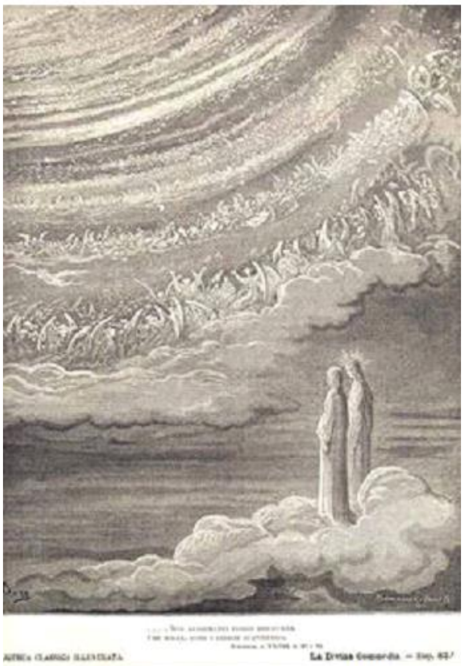
Le "tartarughe" di Netlogo

E per finire: L'infinito esiste solo in una realtà ultraterrena? Quale potrebbe esserne la rappresentazione?

Dante Alighieri, grazie al suo genio artistico e la feconda immaginazione , è riuscito ad esprimere l'inesprimibile, la visione dell'infinito per eccellenza, il Dio creatore e motore dell'universo, in un'architettura cosmica che sembra anticipare la geometria riemanniana.

La possibilità di un approccio all’esegesi dantesca alla luce delle moderne teorie scientifiche ha destato curiosità e interesse da parte di molti matematici , a partire dai primi anni del secolo scorso fino ai giorni nostri. Ricordiamo Pavel Florenskij, Hermann Weyl, Andreas Speiser, Mark Peterson con il suo articolo “Dante e la 3-sfera” (1979), fino al più recente saggio del fisico rumeno Horia-Roman Patapievici “Gli occhi di Beatrice”(2006) e gli interventi di altri autori citati nella bibliografia .

Nel canto XXVIII del Paradiso Dante descrive un’architettura dell’universo, in una mirabile sintesi delle conoscenze scientifiche legate al modello aristotelico, tolemaico-tomista, e alle affermazioni delle Sacre Scritture.



Gustave Doré.- Illustrazione del Canto XXVIII del Paradiso

Nel il suo viaggio attraverso il Paradiso Dante passa di sfera in sfera, dalla Luna a Mercurio a Venere, fino all'ultima sfera: il Primo Mobile.

Quando arriva però ai limiti estremi dell'universo, quando cioè arriva sul Primo Mobile, Dante vede un altro universo, con altre nove sfere via via più piccole, più luminose e dotate di moto più veloce (i cori angelici); essi col loro movimento circolare intorno a un punto luminosissimo, provocano il relativo movimento rotatorio del cielo a cui ciascuno di essi è preposto .

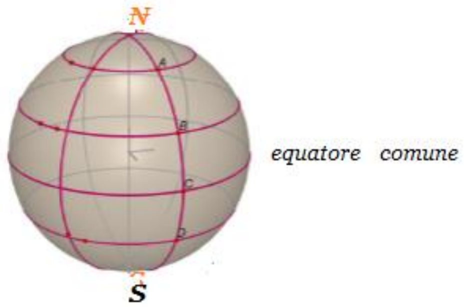
Queste sfere corrispondono a una virtù sempre più grande, ma diversamente da quello che Dante si aspetta, al crescere del <<parametro >> virtù, il raggio delle sfere diminuisce. L’ultima si riduce a un punto luminosissimo che è l’immagine di Dio.

Dante ne osserva prima un’immagine riflessa negli occhi di Beatrice, poi si volge indietro per vedere se la visione è reale; la sua vista è sopraffatta dalla visione diretta del punto luminoso, visibile da ogni punto del Primo Mobile, come se lo circondasse invece di esserne contenuto

E com’io mi rivolsi e furon tocchi
li miei da ciò che pare in quel volume,
quandunque nel suo giro ben s’adocchi
un punto vidi che raggiava lume
acuto sì, che ‘l viso ch’elli affoca
chiuder conviensi per lo forte acume;

Nel canto XXX ritornerà su questa visione parlando del *“ punto che mi vinse, parendo incluso in quel ch’egli include”,* una contraddizione che conferisce ineffabilità e mistero alla rappresentazione di Dio.

Per un matematico l'immagine è invece molto chiara ed esprimibile razionalmente: Dante viaggia in un'ipersfera di dimensione 3 e il punto luminoso è una singolarità, come il «polo Nord» di una proiezione stereografica di una superficie sferica.
Riferendoci al caso bidimensionale, più accessibile alla nostra immaginazione, supponiamo di far percorrere un viaggio analogo a quello di Dante ad un essere bidimensionale che si muove sulla superficie terrestre, dal polo sud al polo nord lungo un meridiano.
Nella prima parte del viaggio *(emisfero inferiore*) il viaggiatore si sposta in un cerchio (*non euclideo*) di raggio (*arco di meridiano*) crescente (*in effetti una porzione di superficie sferica*) il cui contorno cresce anch'esso, raggiungendo il valore massimo all'equatore (corrispondente al Primo Mobile).
Superato l'equatore, il raggio (distanza dal punto di partenza sempre misurato su un arco di meridiano) cresce sempre ma il contorno del cerchio diminuisce fino a ridursi a un punto (polo Nord).
Questo punto è proprio il cerchio di raggio massimo! Infatti, la lunghezza del raggio è pari ad un semimeridiano.
Tutti questi cerchi ricoprono ovviamente la superficie della Terra, formano una superficie sferica. Se potessimo "aprire la sfera" nel polo nord e dispiegarla riportandola a un disco, il punto luminoso torna ad essere la circonferenza massima "*parendo incluso in quel ch'egli include"*



Se ora sostituiamo

- essere bidimensionale → Dante
- cerchi→ sfere
- raggio→ distanza dal centro del mondo visibile

arriveremo alla conclusione che Dante si muove su un'ipersfera di dimensione 3 spostandosi attraverso sfere di dimensione 2, di raggio crescente , in una metrica non euclidea.)
Al crescere del raggio cresce la virtù, quindi questa va associata alla vicinanza a Dio (l'arco complementare di quello che rappresenta la distanza dal punto di partenza).
La simmetria tra mondo visibile e mondo invisibile corrisponde ad un capovolgimento di tutti i parametri, tranne uno: la direzione di ascesa verso l'alto, ovvero verso Dio (il raggio delle sfere sull'ipersfera).
Questa rilettura del poema dantesco , anche nei paragoni più azzardati, non va inteso come una forzatura o una semplice curiosità intellettuale, ma piuttosto come la riscoperta di antichi modelli di pensiero che la Scienza sembrava aver definitivamente abbandonato, dando loro una dignità scientifica con gli adeguati strumenti di indagine nel frattempo acquisiti.

«L'esperienza resta, naturalmente, l'unico criterio per utilizzare una costruzione matematica per la fisica, ma è nella matematica che risiede il principio creatore. Io sono portato a credere nella capacità, in un certo senso, del pensiero puro a dominare la realtà, proprio come pensavano gli antichi»(A. Einstein "Idee e opinioni").

Riferimenti / approfondimenti

- Antoci S. traduzione: Riemann Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria
- https://www.asimmetrie.it/images/pdf/Asimmetrie-20.pdf
- Bartocci C. Geometria e fisica nell'Ottocento: Gauss, Riemann, Helmholtz
- De Bernardis P: https://documen.site/download/archeologia-delluniverso_pdf
- De Cecco G. Dante e l'ipersfera
- Ghione F. Due esempi di spazi triestesi limitati e compatti
- O'Shea Donald La congettura di Poincaré BUR- Rizzoli
- Patapievici H.R.: Gli occhi di Beatrice. Com'era davvero il mondo di Dante, Bruno Mondadori, Milano (2006).