RISOLUZIONE.

Si capisce subito che i numeri da sommare sono tanti quante le permutazioni semplici degli n numeri 1, 2, 3, .. , n, vale a dire n!

Un paio di esempi, per incominciare a capirci qualcosa.

Primo esempio. Se n=4, un paio di tali numeri, presi a caso, sono i seguenti, scritti in colonna come se dovessero essere sommati:

2	4	1	3
3	2	4	1

Il primo di essi, cioè 2 4 1 3, leggendolo da destra verso sinistra, rappresenta:

3 unità $(3 \cdot 10^0)$, 1 decina $(1 \cdot 10^1)$, 4 centinaia $(4 \cdot 10^2)$, 2 migliaia $(2 \cdot 10^3)$.

Cosicché il numero, scritto in forma polinomiale, è il seguente:

$$2\cdot10^3+4\cdot10^2+1\cdot10^1+3\cdot10^0\ .$$

Secondo esempio. Se n=12, scelti sempre a caso, i due numeri sono invece i seguenti, scritti di nuovo in colonna:

2	5	7	4	11	6	9	1	3	12	8	10
3	7	4	5	12	6	9	10	2	11	8	1

Il primo di essi, cioè 2 5 7 4 11 6 9 1 3 12 8 10 , leggendolo da destra verso sinistra, rappresenta:

10 unità $(10 \cdot 10^0)$, 8 decine $(8 \cdot 10^1)$, 12 centinaia $(12 \cdot 10^2)$, 3 migliaia $(3 \cdot 10^3)$, 1 decina di migliaia $(1 \cdot 10^4)$, 9 centinaia di migliaia $(9 \cdot 10^5)$, 6 milioni $(6 \cdot 10^6)$, 11 decine di milioni $(11 \cdot 10^7)$, 4 centinaia di milioni $(4 \cdot 10^8)$, 7 miliardi $(7 \cdot 10^9)$, 5 decine di miliardi $(5 \cdot 10^{10})$, 2 centinaia di miliardi $(2 \cdot 10^{11})$.

Cosicché il numero, scritto in forma polinomiale (anche se non proprio ortodossa), è il seguente:

$$2\cdot10^{11}+5\cdot10^{10}+7\cdot10^9+4\cdot10^8+11\cdot10^7+6\cdot10^6+9\cdot10^5+1\cdot10^4+3\cdot10^3+12\cdot10^2+8\cdot10^1+10\cdot10^0.$$

Detto questo, passiamo a considerazioni più generali.

Ora, se n=2, i 2!=2 numeri sono evidentemente 12 e 21 e la loro somma è chiaramente 33.

Se n=3, è un po' più complicato individuare i 3!=6 numeri, ma ancora piuttosto semplice; essi infatti, scritti in colonna per poterli sommare "a mano", sono i seguenti:

1 2 3

1 3 2

2 1 3

2 3 1

3 1 2

3 2 1

e la loro somma è ancora facile da calcolare, anche con una calcolatrice se si vuole: 1.332.

Ma già con n=4 le cose si complicano, addirittura nell'individuare i 4!=24 numeri. Comunque è ancora possibile risolvere la questione con un po' di pazienza e magari con l'ausilio di una calcolatrice. Per la cronaca, la somma dei 4! numeri è 66.660.

Per valori crescenti di n, però, le complicazioni aumentano in misura considerevole e non è pensabile di scrivere i numeri assegnati in colonna e sommarli, come si fa solitamente se si opera solamente con carta e penna ed eventualmente anche con l'uso di uno strumento di calcolo automatico (come abbiamo fatto con n=3). Come ho detto, già scriverli tutti non è per nulla semplice. S'immagini se bisogna poi calcolarne la somma. Si deve dunque trovare un'altra strada. Ed è ciò che andiamo a fare.

In questo percorso affiancheremo il ragionamento generale al caso particolare in cui n=3, poiché questo caso particolare permette un confronto diretto ed è quindi più semplice da capire e, di conseguenza, è più facile comprendere anche il ragionamento generale.

Ragionamento per n=3	Ragionamento generale
Immaginiamo di scrivere in colonna, uno sopra l'altro, ma senza scriverli realmente, tutti i 3! numeri da sommare. Non ci vuole molto a capire che in ognuna delle 3 colonne (si tenga presente che ogni numero è composto a sua volta da 3 numeri – si veda l'esempio descritto sopra) figurano $\frac{3!}{3}=2!$ numeri uguali ad 1 e altrettanti uguali a 2 ed a 3. La somma S' dei numeri di ogni colonna è pertanto la seguente: $$S' = 1 \cdot 2! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 2!$$ Ossia, tenendo presente la formula che esprime la somma dei primi n numeri naturali non nulli: $$S' = 2! \cdot (1+2+3) = 2! \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{4!}{2}.$$ Ora, basta considerare che, in ciascuno dei numeri da sommare, a partire dalla destra e proseguendo verso sinistra, la 1ª colonna rappresenta i numeri delle unità (10^0), la 2ª colonna rappresenta i numeri delle decine (10^1), la 3ª colonna rappresenta i numeri delle centinaia (10^2). Per cui, la somma S è la seguente: $$S = S' \cdot 10^0 + S' \cdot 10^1 + S' \cdot 10^2$$ cioè: $$S = S' \cdot (10^0 + 10^1 + 10^2)$$ ossia, tenendo presente la formula che esprime la somma di n numeri in progressione geometrica: $$S = \frac{4!}{2} \cdot \frac{10^3 - 1}{10 - 1} = 4! \cdot \frac{10^3 - 1}{18}.$$	Immaginiamo di scrivere in colonna, uno sopra l'altro, ma senza scriverli realmente, tutti gli n! numeri da sommare. Non ci vuole molto a capire che in ognuna delle n colonne (si tenga presente che ogni numero è composto a sua volta da n numeri) figurano $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ numeri uguali ad 1 e altrettanti uguali a 2, a 3, … , ad n. La somma S' dei numeri di ogni colonna è pertanto la seguente: $$S'=1\cdot(n-1)!+2\cdot(n-1)!+3\cdot(n-1)!+\ldots+n\cdot(n-1)!$$ Ossia, tenendo presente la formula che esprime la somma dei primi n numeri naturali non nulli: $$S' = (n-1)! \cdot (1+2+3+\cdots+n) = $$ $$= (n-1)! \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1)!}{2}.$$ Ora, basta considerare che, in ciascuno dei numeri da sommare, partendo dalla destra e proseguendo verso sinistra, la 1ª colonna rappresenta i numeri delle unità (10^0), la 2ª colonna rappresenta i numeri delle decine (10^1), la 3ª colonna rappresenta i numeri delle centinaia (10^2), e così via fino alla n-esima colonna (10^{n-1}). Per cui, la somma S è la seguente: $$S = S'\cdot10^0+S'\cdot10^1+S'\cdot10^2+\ldots+S'\cdot10^{n-1}$$ cioè: $$S = S' \cdot (10^0 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1})$$ ossia, tenendo presente la formula che esprime la somma di n numeri in progressione geometrica: $$S = \frac{(n+1)!}{2} \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} = (n+1)! \cdot \frac{10^n - 1}{18}.$$