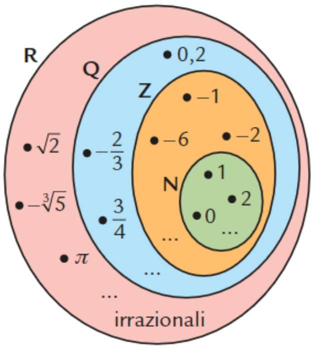
La Spirale di Teodoro

Come è noto, l'insieme ***R*** dei **numeri reali** (unione dei numeri razionali ed irrazionali) può essere definito, progressivamente, come estensione dell'insieme ***N*** dei **numeri naturali,** passando prima **da** ***N*** a ***Z*** (numeri interi) da ***Z*** a ***Q*** (numeri razionali) ed infine da ***Q*** a ***R***



R è un insieme **ordinato, infinito** (come **N, Z,** e **Q)**

denso (come **Q:** *fra due numeri razionali si può sempre trovare un altro numero razionale*)

e **completo** (caratteristica che lo contraddistingue dagli altri) *è possibile stabilire una* ***corrispondenza biunivoca*** *tra l'insieme dei punti di una retta orientata e l'insieme dei numeri reali.*

È possibile, come approfondimento, o in classi del triennio, utilizzare un linguaggio algebrico più rigoroso:

Un insieme in cui siano definite due operazioni di ***addizione*** e ***moltiplicazione*** che godono delle seguenti proprietà:

rispetto all'operazione di ***addizione:*** commutativa; associativa; possiede elemento neutro; è tale che ogni suo elemento ammette inverso rispetto all'operazione di addizione (l'opposto).

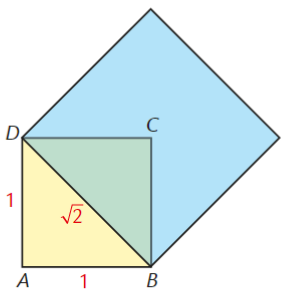
rispetto all' operazione di ***moltiplicazione***: commutativa; associativa; possiede elemento neutro; è tale che ogni suo elemento diverso da 0 ammette inverso rispetto all'operazione di moltiplicazione (il reciproco); è distributiva rispetto all'addizione.

si chiama **campo (o corpo commutativo)**.

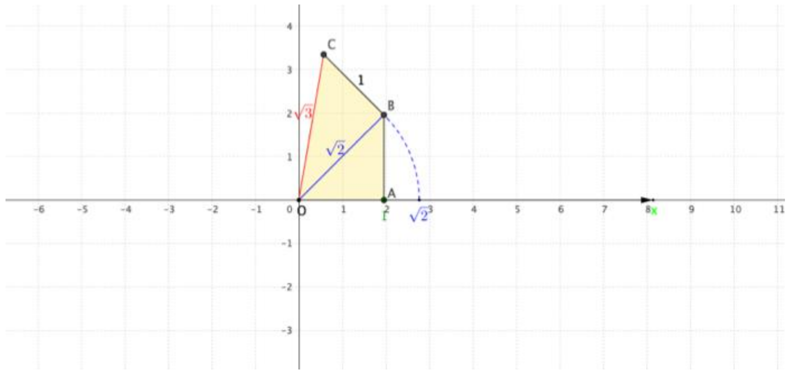
Se in un campo è anche definita una ***relazione d'ordine*** compatibile con la **somma**, e con il **prodotto** si dice che il **campo è ordinato**.

Gli insiemi Q ed R sono campi ordinati, l'insieme **R**, a differenza di **Q**, soddisfa anche la proprietà di completezza ***Per ogni coppia di classi contigue di numeri reali (cioè per ogni coppia di insiemi A; B di numeri reali separati e indefinitamente ravvicinati), esiste un unico numero reale s, detto elemento separatore di A e B, tale che:*** **$a \leq s \leq b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$ e viene, dunque, detto** ***campo ordinato completo***.

L'insieme R è univocamente individuato dal fatto di essere un campo ordinato completo; ed è possibile dimostrare che ogni campo ordinato completo si può identificare con R.



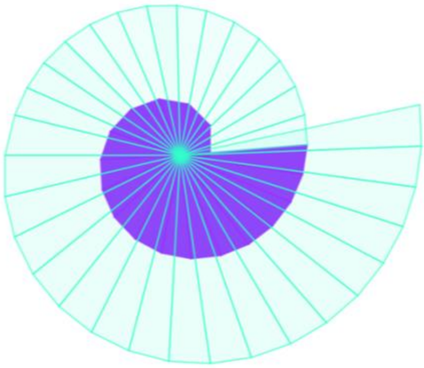
In generale, è possibile verificare che se proviamo a trasportare sull'asse dei numeri, la diagonale di un quadrato di lato 1 ci renderemo conto che tale valore corrisponde, per il teorema di Pitagora, alla $\sqrt{2}$, ma che tale numero è incommensurabile (cioè non esprimibili come numero intero o rapporto di interi) e la sua dimostrazione classica, con le relative considerazioni sulla scuola Pitagorica ed i *numeri figurati*, è tranquillamente proponibile ad alunne ed alunni del secondo liceo scientifico.



Per rendere più visibile la costruzione geometrica dei radicali di indice 2 è interessante proporre alla classe la costruzione della ***spirale di Teodoro***.

Cenni storici:

Teodoro di Cirene (465 a. C.), matematico greco antico della scuola pitagorica, fu docente di matematica di Platone e di Teeteto e noto per la famosa spirale che porta il suo nome.



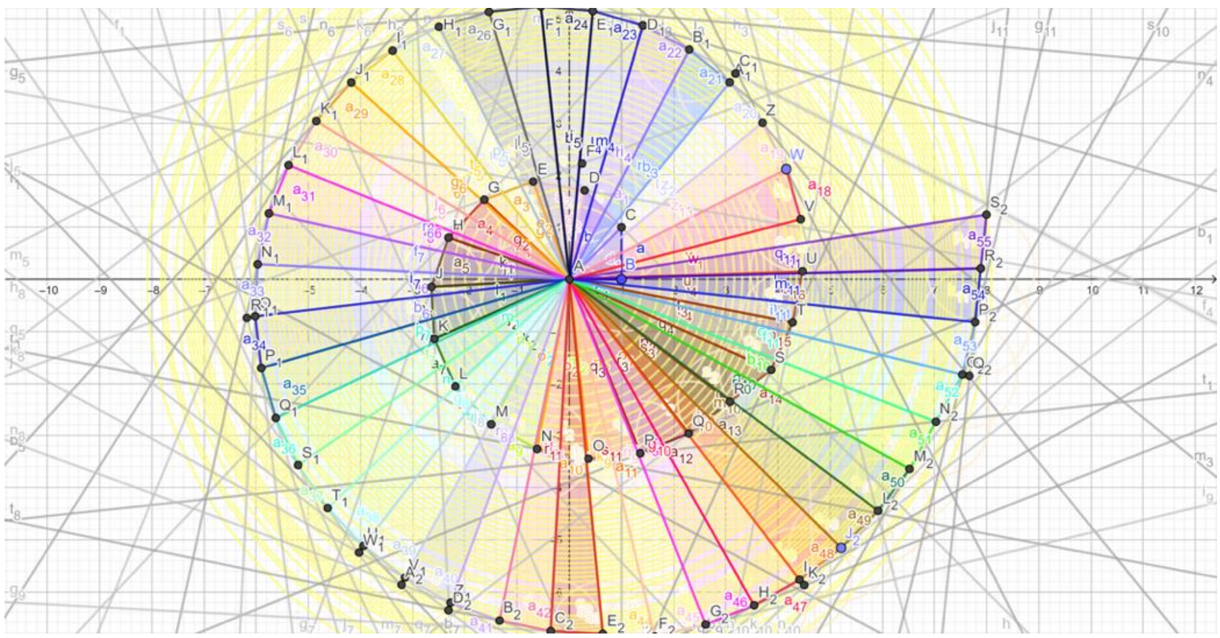
Platone, nel dialogo che scrisse in memoria dell'amico **Teeteto**, narra che il suo maestro, **Teodoro,** fu il primo a dimostrare l'irrazionalità delle radici quadrate degli interi non quadrati da 3 a 17 incluso (presumibilmente mediante proprio la ***Spirale di Teodoro***), ma non gli attribuisce l'irrazionalità della $\sqrt{2}$, poiché nota già prima di lui.

Platone si chiese, inoltre, per quale motivo Teodoro avesse costruito la spirale solo fino a $\sqrt{17}$ (in figura rappresentata dalla parte viola), ciò, presumibilmente, perché è il massimo numero di triangoli che si possono disegnare senza sovrapposizioni.

Di seguito la costruzione della spirale e la sua rappresentazione mediante costruzione con riga e compasso eseguita con GeoGebra. Tale costruzione può essere fatta partendo da qualsiasi punto del piano ma in questo contesto si è preferito partire dal centro degli assi cartesiani.

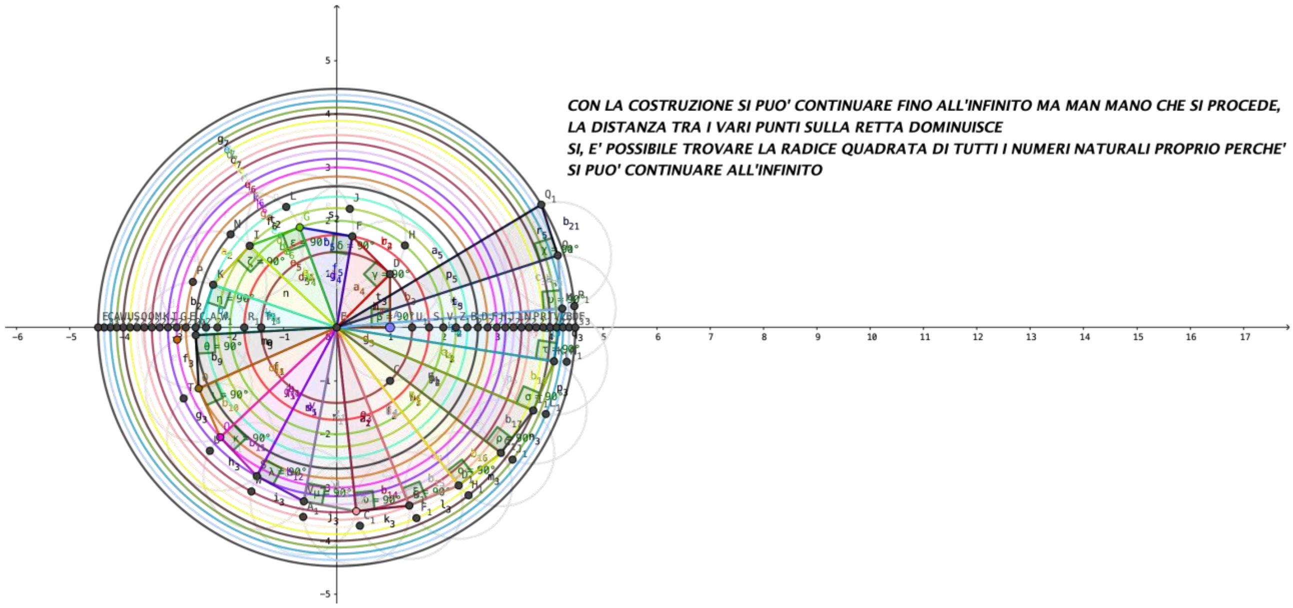
Costruzione:

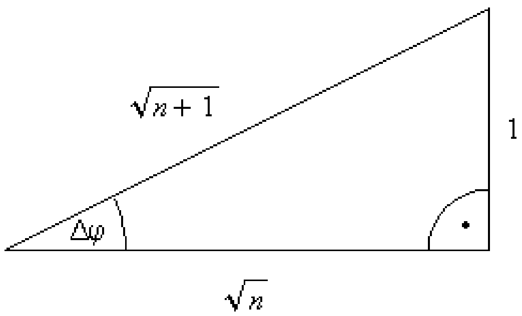
Partendo dal centro degli assi cartesiani costruiamo un triangolo rettangolo isoscele, con i due cateti di lunghezza unitaria, l'ipotenusa di questo triangolo è, come già detto, $\sqrt{2}$. *Costruiamo ora, un altro triangolo rettangolo, contiguo al precedente, che avrà quindi un cateto di lunghezza* $\sqrt{2}$, *e l'altro unitario. L'ipotenusa sarà , sempre in base al teorema di Pitagora,* $\sqrt{3}$. *Continuando la costruzione possiamo notare che ogni triangolo ennesimo, costruito sul precedente della serie è un triangolo rettangolo con un cateto (chiamiamolo quello esterno) unitario e l'altro* $\sqrt{n}$ *e con ipotenusa* $\sqrt{n+1}$.



Continuando all'infinito, si potrebbe costruire la radice quadrata di qualsiasi numero esistente, ed è tutt'oggi l'unico metodo conosciuto che permette di costruire geometricamente la radice quadrata di un qualsiasi numero.

Nel 1958, E. Teuffel, dimostrò che continuando indefinitamente la spirale di Teodoro non vi saranno ipotenuse coincidenti e che estendendo i lati dei triangoli della spirale indefinitamente questi non incontreranno mai i vertici degli altri triangoli.





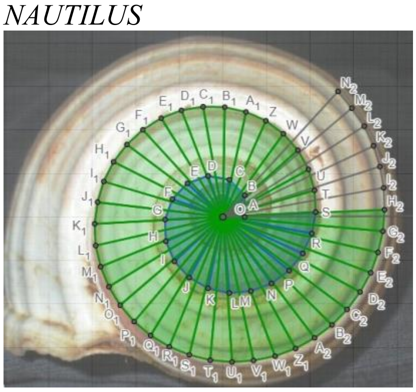
Esistono, inoltre, altre proprietà (non mostrabili ad alunni del secondo liceo):

- nel triangolo ennesimo l'aumento dell'angolo $\Delta\varphi$ è arctan $(1/\sqrt{n})$
- il raggio della spirale cresce come $\sqrt{n+1}\ -\sqrt{n}$.

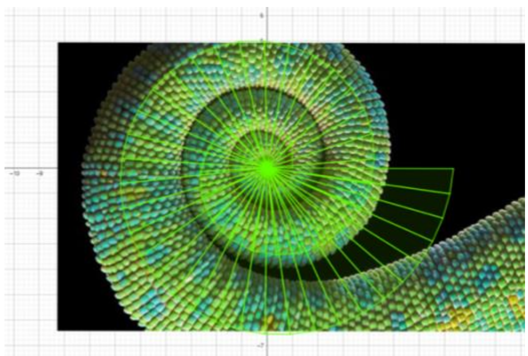
che permettono di dimostrare che la spirale di Teodoro al crescere di n si avvicina alla spirale di Archimede.

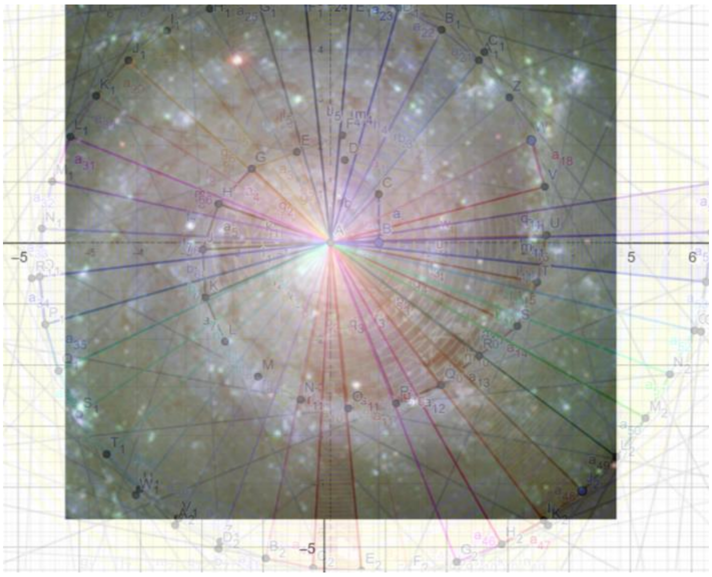
Ad alunni del secondo liceo è invece possibile chiedere esempi in natura in cui è presente la spirale di Teodoro…

NAUTILUS



SERPENTE





“ Ci sono due modi di vivere la tua vita. Una è pensare che niente è un miracolo. L'altra è pensare che ogni cosa è un miracolo”
Albert Einstein

GALASSIA

I disegni sono stati eseguiti dagli alunni della classe ***2B*** *del* ***Liceo Scientifico “ISISS Amaldi Nevio” di S. Maria C. V.***

Bibliografia

Boyer C.B. "Storia della Matematica", Oscar Saggi Mondadori;
https://en.wikipedia.org/wiki/Spiral_of_Theodorus;
https://it.wikipedia.org/wiki/Teodoro_di_Cirene_(matematico);
Libro di testo “I Colori della Matematica ed Blu” DEASCUOLA