Due teoremi di Feuerbach e altro
di Antonino Giambò

1. Il matematico tedesco Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) diventò celebre all'età di 22 anni per aver scoperto e dimostrato il seguente teorema, che comparve nel 1822 in un libriccino di poco meno di 100 pagine, dal titolo che, tradotto in italiano, suona così: *Proprietà di alcuni strani punti del triangolo rettilineo e delle sue linee e figure*:

TEOREMA (1): *Il cerchio che passa per i piedi delle altezze di un triangolo tocca tutti e quattro i cerchi che sono tangenti alle rette dei tre lati del triangolo: è tangente internamente al cerchio inscritto nel triangolo ed è tangente esternamente ai tre cerchi ex-inscritti*.

Ma Feuerbach dimostrò anche quest'altro teorema:

TEOREMA (2). *Il centro* W *del cerchio dei nove punti appartiene alla retta di Eulero ed è il punto medio del segmento che unisce l'ortocentro* H *del triangolo di riferimento e il suo circocentro* K.

Ho già proposto gli enunciati di questi due teoremi in un recente articolo pubblicato su questa stessa rubrica (*Il triangolo mediale*).

Francamente non conosco le dimostrazioni fornite da Feuerbach e non so neppure, per dirla tutta, se esista una dimostrazione dei teoremi condotta con i soli strumenti della Geometria sintetica. Mi risulta che esistono dimostrazioni che utilizzano la Trigonometria e/o la Geometria Analitica. Si tratta di dimostrazioni concettualmente semplici, che richiedono purtroppo, almeno per il 1° teorema, calcoli noiosi e complicati.

In questo articolo mostrerò la verifica (non la dimostrazione) del 1° teorema in un caso in cui i dati assegnati sono stati scelti accuratamente in modo da rendere i calcoli il più possibile semplici ma, ciò nonostante, le complicazioni non mancano. Supporterò i ragionamenti con gli strumenti della Geometria Analitica.

L'esempio dovrebbe dare l'idea di ciò cui si andrebbe incontro se si dovesse condurre una dimostrazione nel caso generale con questo metodo.

Ma c'è, almeno nelle mie intenzioni, un altro aspetto della questione, che ritengo interessante: lo sviluppo dell'argomento potrebbe suggerire ai docenti della secondaria di 2° grado spunti per esercizi non banali da proporre ai loro alunni.

Per il 2° teorema, comunque, considerato che i calcoli non sono complicati, ne darò una dimostrazione.

Ma c'è dell'altro.

2. Per la verifica accennata farò riferimento al triangolo ABC, per i cui lati ho scelto le seguenti lunghezze:

$$\overline{\mathrm{AB}} = 21,\ \ \overline{\mathrm{BC}} = 20,\ \ \overline{\mathrm{CA}} = 13.$$

Il triangolo è riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui l'origine è il piede O dell'altezza del triangolo condotta per C, l'asse x è la retta AB orientata da A verso B e ovviamente l'asse y è la retta OC orientata da O verso C (figura 1).

Con questa scelta si trovano le seguenti coordinate dei vertici del triangolo:

$$\mathrm{A}(-5,0),\ \ \mathrm{B}(16,0),\ \ \mathrm{C}(0,12).$$

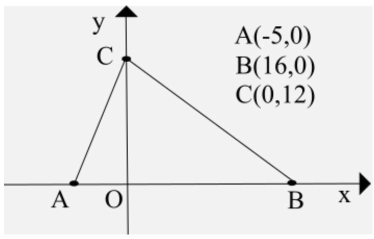

figura 1

Il ragionamento sarà condotto sulla base del seguente teorema di Geometria piana, a tutti noto:

Siano dati due cerchi di centri P e P' e raggi rispettivamente r ed r'. Condizione necessaria e sufficiente affinché risultino tangenti è che risulti dist (P,P') = r−r' oppure dist (P,P') = r+r'. Precisamente:

- nel primo caso i due cerchi sono ***tangenti internamente***,
- nel secondo caso sono ***tangenti esternamente***.

Si capisce dunque che, oltre al centro e al raggio del cerchio k passante per i piedi delle altezze del triangolo, occorre conoscere anche i centri e i raggi dei cerchi tangenti alle rette dei lati del triangolo, vale a dire dei seguenti cerchi:

- cerchio γ_A tangente al lato BC e al prolungamento degli altri due lati,
- cerchio γ_B tangente al lato CA e al prolungamento degli altri due lati,
- cerchio γ_C tangente al lato AB e al prolungamento degli altri due lati,
- cerchio γ inscritto nel triangolo ABC.

Bisogna trovare perciò le coordinate dei centri e le lunghezze dei raggi dei seguenti cerchi:
- cerchio k passante per i piedi delle altezze del triangolo (raggio R, centro W),
- cerchi $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$, ex-inscritti al triangolo (nell'ordine: raggi r_A, r_B, r_C; centri E_A, E_B, E_C)
- cerchio γ inscritto nel triangolo (raggio r, centro I).

- Per quanto riguarda la lunghezza R del raggio del cerchio k, è necessario ricordare che questo cerchio è il cosiddetto *cerchio dei nove punti* (o *cerchio di Feuerbach*), il quale passa anche per i punti medi dei lati del triangolo. Imponendo allora che il cerchio k di equazione generica:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

passi per i punti medi dei due lati AB e BC, ossia per i punti di coordinate: $\left(\frac{11}{2}, 0\right), (8, 6)$, e per il piede O dell'altezza OC del triangolo, si ottengono le seguenti equazioni nelle incognite α, β, γ:

$$22\,\alpha + 4\,\gamma = -121, \quad 8\,\alpha + 6\,\beta + \gamma = -100, \quad \gamma = 0.$$

Una volta risolto il loro sistema si trova:

$$\alpha = -\frac{11}{2}\,, \quad \beta = -\frac{28}{3}\,, \quad \gamma = 0.$$

Si ottiene così l'equazione di k:

$$k \equiv x^2 + y^2 - \frac{11}{2}x - \frac{28}{3}y = 0\,,$$

la quale ci consente di ricavare sia la lunghezza di R sia le coordinate del centro W di k. Si ha infatti:

$$W\left(\frac{11}{4}, \frac{14}{3}\right), \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{28}{3}\right)^2} = \frac{65}{12}.$$

- Andiamo a calcolare adesso le coordinate dei centri dei cerchi $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C, \gamma$.

Bisogna tener presente che questi centri sono situati sulle bisettrici degli angoli, interni o esterni, del triangolo ABC. Dobbiamo trovare dunque le equazioni di queste bisettrici.

Per prima cosa troviamo le equazioni delle rette dei lati. Cosa di per sé abbastanza semplice. Si ha:

$$AB \equiv y = 0\,, \quad BC \equiv 3\,x + 4\,y - 48 = 0\,, \quad CA \equiv 12\,x - 5\,y + 60 = 0\,.$$

Le bisettrici degli angoli in A sono i luoghi dei punti equidistanti dalle rette dei lati che convergono in A, cioè CA e AB. Le loro equazioni sono le seguenti:

$$\frac{|12\,x - 5\,y + 60|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = |y|\,, \quad \text{vale a dire: } 12\,x - 5\,y + 60 = \pm 13\,y\,;$$

cosicché la bisettrice b_A dell'angolo interno e la bisettrice b'_A dell'angolo esterno hanno le seguenti equazioni:

$$b_A \equiv 2\,x - 3\,y + 10 = 0\,, \quad b'_A \equiv 3\,x + 2\,y + 15 = 0\,.$$

Le bisettrici degli angoli in B sono i luoghi dei punti equidistanti dalle rette dei lati che convergono in B, cioè BC e AB. Le loro equazioni sono le seguenti:

$$\frac{|3\,x + 4\,y - 48|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = |y|\,, \quad \text{vale a dire: } 3\,x + 4\,y - 48 = \pm\,5\,y\,;$$

cosicché la bisettrice b_B dell'angolo interno e la bisettrice b'_B dell'angolo esterno hanno le seguenti equazioni:

$$b_B \equiv x + 3\,y - 16 = 0\,, \quad b'_B \equiv 3\,x - y - 48 = 0\,.$$

Le bisettrici degli angoli in C sono i luoghi dei punti equidistanti dai lati che convergono in C, cioè BC e CA. Le loro equazioni sono le seguenti:

$$\frac{|3\,x + 4\,y - 48|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|12\,x - 5\,y + 60|}{\sqrt{12^2 + 5^2}}, \quad \text{vale a dire: } 13\,(3\,x + 4\,y - 48) = \pm 5\,(12\,x - 5\,y + 60)\,;$$

cosicché la bisettrice b_C dell'angolo interno e la bisettrice b'_C dell'angolo esterno hanno le seguenti equazioni:

$$b_C \equiv 11\,x + 3\,y - 36 = 0\,, \quad b'_C \equiv 3\,x - 11\,y + 132 = 0\,.$$

Possiamo adesso trovare le coordinate dei centri delle suddette circonferenze.

- Il centro E_A è il punto d'incontro delle bisettrici degli angoli esterni che convergono in B e in C, cioè $E_A = b'_B \cap b'_C$:

$$\begin{cases} 3x - y - 48 = 0 \\ 3x - 11y + 132 = 0 \end{cases}$$ da cui, una volta risolto il sistema, segue: $E_A(22, 18)$.

- Il centro E_B è il punto d'incontro delle bisettrici degli angoli esterni che convergono in C e in A, cioè $E_B = b'_C \cap b'_A$:

$$\begin{cases} 3x - 11y + 132 = 0 \\ 3x + 2y + 15 = 0 \end{cases}$$ da cui, una volta risolto il sistema, segue: $E_B(-11, 9)$.

- Il centro E_C è il punto d'incontro delle bisettrici degli angoli esterni che convergono in A e in B, cioè $E_C = b'_A \cap b'_B$:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 15 = 0 \\ 3x - y - 48 = 0 \end{cases}$$ da cui, una volta risolto il sistema, segue: $E_C(9, -21)$.

- Il centro I è il punto d'incontro delle bisettrici degli angoli interni che convergono, per esempio, in A e in B, è insomma l'incentro del triangolo ABC; quindi $I = b_A \cap b_B$:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 10 = 0 \\ x + 3y - 16 = 0 \end{cases}$$ da cui, una volta risolto il sistema, segue: $I\left(2, \frac{14}{3}\right)$.

Per la cronaca, cosa del resto risaputa, le bisettrici che riguardano uno stesso vertice sono perpendicolari.

- Giunti a questo punto, le lunghezze dei raggi dei cerchi inscritto ed ex-inscritti al triangolo ABC sono una pura e semplice formalità. Si trova infatti piuttosto agevolmente:

$$r_A = \text{dist}\,(E_A, BC) = 18\,,\quad r_B = \text{dist}\,(E_B, CA) = 9\,,\quad r_C = \text{dist}\,(E_C, AB) = 21\,,\quad r = \text{dist}\,(I, AB) = 14/3\,.$$

- Finalmente possiamo trarre le conclusioni. Si costata infatti che si ha:

– $\text{dist}\,(E_A, W) = \sqrt{\left(22 - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(18 - \frac{14}{3}\right)^2} = \frac{281}{12}$ e nello stesso tempo: $R + r_A = \frac{65}{12} + 18 = \frac{281}{12}$;

– $\text{dist}\,(E_B, W) = \sqrt{\left(-11 - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(9 - \frac{14}{3}\right)^2} = \frac{173}{12}$ e nello stesso tempo: $R + r_B = \frac{65}{12} + 9 = \frac{173}{12}$;

– $\text{dist}\,(E_C, W) = \sqrt{\left(9 - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(-21 - \frac{14}{3}\right)^2} = \frac{317}{12}$ e nello stesso tempo: $R + r_C = \frac{65}{12} + 21 = \frac{317}{12}$;

– $\text{dist}\,(I, W) = \frac{11}{4} - 2 = \frac{3}{4}$ e nello stesso tempo: $R - r = \frac{65}{12} - \frac{14}{3} = \frac{3}{4}$.

Questo significa che ciascuno dei tre cerchi $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$ è tangente esternamente al cerchio k, mentre il cerchio γ è tangente internamente a k. E questo è ciò che si doveva verificare.

3. La verifica eseguita non richiede la conoscenza delle equazioni dei cerchi tangenti al cerchio k né le coordinate dei punti di contatto. Ciò nondimeno vogliamo trovare ugualmente le une e le altre.

Incominciamo con le equazioni dei cerchi.

- Equazione del cerchio γ_A: $(x - 22)^2 + (y - 18)^2 = 18^2$.
- Equazione del cerchio γ_B: $(x + 11)^2 + (y - 9)^2 = 9^2$.
- Equazione del cerchio γ_C: $(x - 9)^2 + (y + 21)^2 = 21^2$.
- Equazione del cerchio γ: $(x - 2)^2 + \left(y - \frac{14}{3}\right)^2 = \left(\frac{14}{3}\right)^2$.

Si possono calcolare le coordinate dei punti T_A, T_B, T_C, X, in cui i cerchi rispettivamente $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C, \gamma$, toccano il cerchio k di Feuerbach. Si tratta di risolvere i 4 sistemi formati ciascuno dall'equazione del cerchio k e dall'equazione del cerchio tangente ad esso, considerato di volta in volta. A conti fatti si trovano i seguenti risultati:

– coordinate del punto T_A: $x_1 = \frac{2024}{281} \approx 8{,}76$, $y_1 = \frac{2178}{261} \approx 7{,}75$;

– coordinate del punto T_B: $x_2 = -\frac{418}{173} \approx -2{,}42$, $y_2 = \frac{1089}{173} \approx 6{,}29$;

- coordinate del punto T_C: $x_3 = \frac{1278}{317} \approx 4{,}03$, $y_3 = -\frac{189}{317} \approx -0{,}60$;
- coordinate del punto X (*punto di Feuerbach*): $x_X = -\frac{8}{3} \approx -2{,}67$, $y_X = \frac{14}{3} \approx 4{,}67$.

La figura sottostante (figura 2) fornisce la rappresentazione completa della situazione.

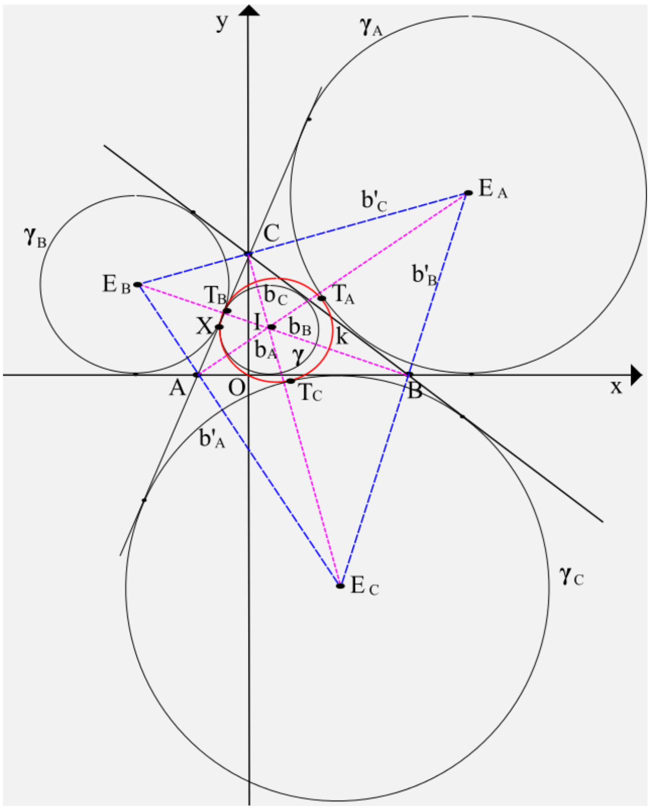

figura 2

4. Dimostriamo il 2° teorema di Feuerbach. Per questo, considerato un triangolo ABC, riferiamo il suo piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), in modo che l'origine O coincida con il piede dell'altezza condotta per C, l'asse x coincida con la retta AB orientata da A verso B e l'asse y con la retta OC orientata da O verso C (figura 3). Siano poi le seguenti coordinate dei vertici del triangolo: A(a,0), B(b,0), C(0,c), essendo a, b, c numeri reali con b>a e c>0.

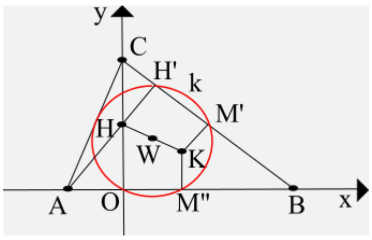

figura 3

- Troviamo anzitutto le coordinate dell'ortocentro H e del circocentro K del triangolo.

Occupiamoci del punto H.

Esso è il punto in cui si intersecano le altezze CO e AH' del triangolo. L'equazione di CO è chiaramente x=0. Bisogna dunque trovare l'equazione di AH'. Orbene, AH' può essere concepita come la perpendicolare alla retta BC, di coefficiente angolare $-\frac{c}{b}$, condotta per il punto $A(a,0)$. Pertanto: $AH' \equiv y = \frac{b}{c}(x-a)$.

Si desume che l'ortocentro H ha le seguenti coordinate:

$$H\left(0, -\frac{a\,b}{c}\right).$$

Passiamo al punto K.

Esso è il punto in cui si intersecano gli assi dei lati AB e BC del triangolo. Per determinare le equazioni di questi due assi occorrono anzitutto le coordinate dei punti medi M" e M' dei lati AB e BC rispettivamente. Ebbene si ha: $M''\left(\frac{a+b}{2}\ ,0\right)$, $M'\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$. Pertanto l'asse del lato AB ha equazione $x=\frac{a+b}{2}$, mentre l'asse del lato BC è la perpendicolare alla retta BC, di coefficiente angolare $-\frac{c}{b}$, condotta per il punto M', per cui la sua equazione è la seguente: $y=\frac{b}{c}\left(x-\frac{b}{2}\right)+\frac{c}{2}$.

Si desume che il circocentro K ha le seguenti coordinate:

$$K\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a\,b+c^2}{2\,c}\right).$$

- Possiamo trovare adesso le coordinate del punto medio D del segmento HK. Si ha precisamente:

$$x_D=\frac{x_H+x_K}{2}=\frac{\frac{a+b}{2}}{2}=\frac{a+b}{4}\,,\qquad y_D==\frac{y_H+y_K}{2}=\frac{-\frac{ab}{c}+\frac{ab+c^2}{2\,c}}{2}=\frac{c^2-ab}{4\,c}\,.$$

- A questo punto, manca di trovare le coordinate del centro del cerchio di Feuerbach. Troviamo per prima cosa l'equazione di questo cerchio, che può essere concepito come il cerchio passante per i punti O, M', M".

A conti fatti, la sua equazione è la seguente:

$$x^2+y^2-\frac{a+b}{2}\,x-\frac{c^2-ab}{2\,c}\,y=0\,.$$

Si desume che le coordinate del suo centro W sono le seguenti:

$$W\left(\frac{a+b}{4},\ \frac{c^2-ab}{4\,c}\right).$$

Vale a dire che W coincide con D ossia – come si doveva dimostrare – il centro del cerchio di Feuerbach è il punto medio del segmento avente per estremi l'ortocentro e il circocentro del triangolo. Per cui è allineato con questi due punti e si trova perciò sulla retta di Eulero del triangolo ABC.

Se, a titolo di esempio, il triangolo ABC è quello stesso che abbiamo preso in considerazione nel precedente esercizio di verifica, ossia il triangolo di vertici $A(-5{,}0), B(16{,}0), C(0{,}12)$, per i punti H, K, W si possono calcolare le seguenti coordinate, che verificano il 2° teorema:

$$H\left(0,\frac{20}{3}\right)\ ,\ \ K\left(\frac{11}{2},\frac{8}{3}\right)\ ,\ \ W\left(\frac{11}{4},\frac{14}{3}\right).$$

5. Un altro teorema vogliamo adesso verificare, già enunciato in un altro articolo pubblicato in precedenza (*Il triangolo pedale*). Il suo enunciato è il seguente:

TEOREMA. *Sia* Y *il punto di Bevan di un dato triangolo* ABC. *Allora il triangolo pedale di* Y *rispetto ad* ABC *è il triangolo* $T_AT_BT_C$ *avente per vertici i punti in cui i lati del triangolo* ABC *toccano i cerchi ex-inscritti al triangolo*.

Condurremo la verifica di questo teorema sulla base dei dati che ci hanno accompagnato fin qui.

Ricordo che il punto di Bevan di un triangolo è il circocentro del triangolo avente per vertici i centri dei cerchi ex-inscritti al triangolo. Ragion per cui, se il triangolo è il solito triangolo ABC (figura 4), i cui vertici hanno coordinate $A(-5{,}0), B(16{,}0), C(0{,}12)$, i centri dei cerchi ad esso ex-inscritti sono i punti $E_A(22, 18)$, $E_B(-11, 9)$, $E_C(9,-21)$, già trovati in precedenza.

Il punto di Bevan è allora il punto in cui si intersecano due assi del triangolo, in particolare gli assi dei lati E_AE_B e E_BE_C. Una volta stabilito che questi assi hanno le seguenti equazioni:

$$3\,x-11\,y+132=0,\ \ 3\,x+2\,y+15=0,$$

risolvendo il loro sistema si trovano le coordinate di Y e precisamente:

$$Y\left(9,\frac{2}{3}\right).$$

Ora, per determinare le coordinate dei vertici del triangolo pedale di Y rispetto al triangolo ABC, bisogna anzitutto conoscere le equazioni dei lati di questo triangolo, che, come abbiamo già visto, sono le seguenti:

$$AB \equiv y = 0,\ \ BC \equiv 3\,x + 4\,y - 48 = 0,\ \ CA \equiv 12\,x - 5\,y + 60 = 0.$$

Si trovano, quindi, le equazioni delle rette perpendicolari a questi lati, condotte per Y e si trova:

$$h_{AB} \equiv x = 9,\ \ h_{BC} \equiv 4\,x - 3\,y - 34 = 0,\ \ h_{CA} \equiv 5\,x + 12\,y - 49 = 0.$$

Di conseguenza:

- coordinate di $T_A = BC \cap h_{BC}$: $\begin{cases} 3\,x + 4\,y - 48 = 0 \\ 4\,x - 3\,y - 34 = 0 \end{cases}$ da cui: $T_A\left(\frac{56}{5}, \frac{18}{5}\right)$;
- coordinate di $T_B = CA \cap h_{CA}$: $\begin{cases} 12\,x - 5\,y + 60 = 0 \\ 5\,x + 12\,y - 49 = 0 \end{cases}$ da cui: $T_B\left(-\frac{475}{169}, \frac{888}{169}\right)$;
- coordinate di $T_C = AB \cap h_{AB}$: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 9 \end{cases}$ da cui: $T_C(9, 0)$.

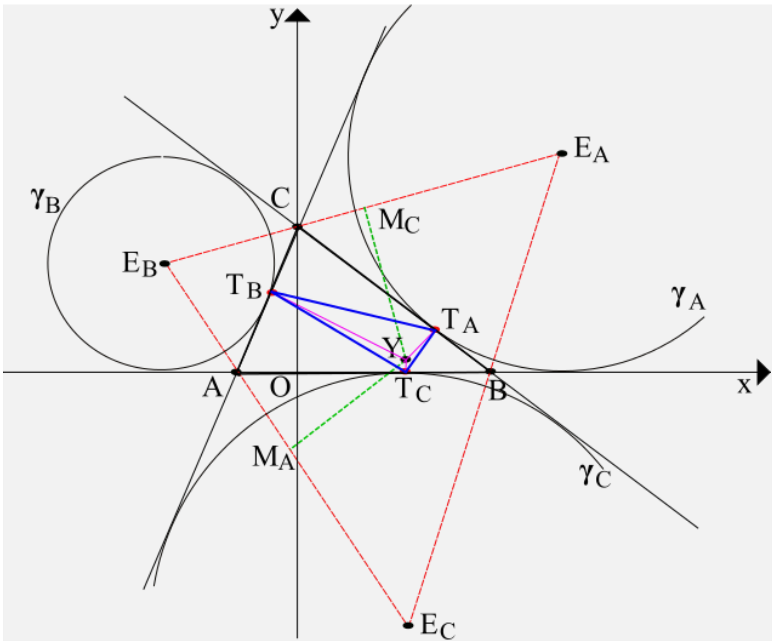

figura 4

A questo punto, onde confermare che i vertici del triangolo pedale di Y rispetto ad ABC, ovvero i punti T_A, T_B, T_C, sono i punti in cui i lati di ABC (i lati, non i loro prolungamenti) toccano i cerchi ex-inscritti al triangolo ABC, occorre intersecare ciascuno dei tre cerchi $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$ rispettivamente con le rette BC, CA, AB, e far vedere per l'appunto che γ_A tocca BC in T_A, γ_B tocca CA in T_B, γ_C tocca AB in T_C.

Di fatto risulta:

- $BC \cap \gamma_A$: $\begin{cases} 3\,x + 4\,y - 48 = 0 \\ (x - 22)^2 + (y - 18)^2 = 18^2 \end{cases}$ da cui: $T_A\left(\frac{56}{5}, \frac{18}{5}\right)$;
- $CA \cap \gamma_B$: $\begin{cases} 12\,x - 5\,y + 60 = 0 \\ (x + 11)^2 + (y - 9)^2 = 9^2 \end{cases}$ da cui: $T_B\left(-\frac{475}{169}, \frac{888}{169}\right)$;
- $AB \cap \gamma_C$: $\begin{cases} y = 0 \\ (x - 9)^2 + (y + 21)^2 = 21^2 \end{cases}$ da cui: $T_C\,(9, 0)$.