Teoremi vari di geometria
(proposti per colmare delle lacune)
di Antonino Giambò

1. Premessa.

In un articolo pubblicato qualche tempo fa su questa medesima rubrica (*Massimi e minimi con stile euclideo*) sono rimasti in sospeso alcuni teoremi, nel senso che sono stati enunciati ma non dimostrati. Adesso provo a colmare la lacuna. Premetto che in qualche caso si tratta di dimostrazioni non semplicissime.

Riporto per prima cosa gli enunciati dei teoremi dei quali proporrò successivamente la dimostrazione.

TEOREMA 1. *Fra i poligoni isoperimetrici aventi lo stesso numero di lati il poligono regolare ha area massima.*

TEOREMA 2. *Il cerchio ha area maggiore di qualunque poligono regolare di uguale perimetro.*

TEOREMA 3. *È dato un triangolo ABC, i cui angoli interni hanno tutti ampiezza minore di 120°. Si costruiscono sui suoi lati ed esternamente ad esso i tre triangoli equilateri ABL, BCH, CAK. Le rette AH, BK, CL s'incontrano in un punto, che è esattamente il punto di Fermat*.

TEOREMA 4. *Fra tutti i segmenti sferici compresi da uguale superficie, il maggiore è l'emisfero*.

TEOREMA 5. *Data una parabola di vertice V e fuoco F e preso sul suo asse VF il punto P tale che il segmento VP sia lungo la metà del lato retto* [1]*, tra i segmenti aventi un estremo in P e l'altro estremo sulla parabola, il segmento VP è quello di lunghezza minima*.

TEOREMA 6. *Data un'ellisse di asse maggiore AB e avente un fuoco in F e preso su tale asse un punto P tale che il segmento AP sia lungo quanto la metà del lato retto, tra i segmenti aventi un estremo in P e l'altro estremo sull'ellisse, il segmento AP è quello di lunghezza minima mentre il segmento BP è quello di lunghezza massima*.

2. Dimostrazione del teorema 1.

Sappiamo già (cfr.: articolo succitato) che fra i triangoli isoperimetrici il triangolo equilatero è quello di area massima.

Per quanto concerne i poligoni con un numero di lati maggiore di 3, prendiamo per comodità i pentagoni.

Benché sia possibile un ragionamento più generale, ci riferiamo per semplicità ad una situazione particolare.

Siano allora il pentagono regolare ABCDE e il pentagono irregolare APCDE (figura 1), aventi lo stesso perimetro. Fermiamo l'attenzione sui due triangoli ABC e APC: è evidente che hanno lo stesso perimetro e la stessa base AC. E sappiamo (cfr.: stesso articolo) che il triangolo isoscele ABC ha area maggiore dell'altro triangolo APC.

Pertanto il pentagono regolare ABCDE ha area maggiore del pentagono irregolare APCDE.

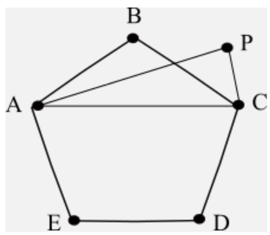

Figura 1

3. Dimostrazione del teorema 2.

Siano un poligono regolare P di n lati di apotema HM e un cerchio Q di raggio KN (figura 2, dove n=5).

Sia p il perimetro comune delle due figure. Costruiamo il poligono regolare di n lati circoscritto al cerchio Q: l'apotema di questo poligono è KN ed è KN>HM. Infatti, essendo il perimetro di questo poligono maggiore della lunghezza della circonferenza inscritta, tale perimetro risulta maggiore di p, pertanto CD>AB. D'altro canto, per la similitudine dei triangoli HAB e KCD, si ha CD/AB=KN/HM, per cui, come CD>AB, anche KN>HM.

[1] Si ricorda che il lato retto di una conica è la corda della conica parallela ad una sua direttrice e passante per il fuoco coniugato della direttrice medesima

Osserviamo adesso che le aree di P e di Q sono rispettivamente:

$$\mathrm{area(P)} = \frac{1}{2}\mathrm{p}\cdot\overline{\mathrm{HM}}, \quad \mathrm{area(Q)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{p}\cdot\overline{\mathrm{KN}}.$$

E siccome KN>HM allora area(Q)>area(P). Come si voleva dimostrare.

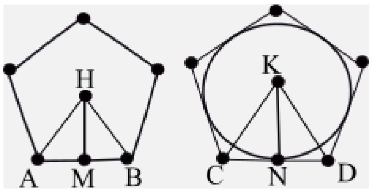

figura 2

OSSERVAZIONE. Il “combinato disposto” dei due precedenti teoremi implica la seguente conclusione: *Il cerchio ha area maggiore di qualunque poligono di uguale perimetro.*

4. Dimostrazione del teorema 3.

La dimostrazione di questo teorema richiede la premessa di un lemma.

LEMMA. Se il segmento PQ è visto sotto angoli uguali dai punti A e B allora il quadrilatero di vertici A, B, P, Q è un quadrilatero ciclico.

DIMOSTRAZIONE. Sono dati i punti A, B, P, Q tali che $P\widehat{A}Q=P\widehat{B}Q$. Ci proponiamo di dimostrare che sono situati su una medesima circonferenza.

Sia allora k la circonferenza passante per i punti P, Q, A e ragioniamo per assurdo.

Se il punto B non appartenesse a k, sarebbe o interno ad essa o esterno.

Supponiamo che B sia interno a k (figura 3). Indichiamo con R il punto in cui la retta BQ interseca k e congiungiamo R con P. Risultano uguali gli angoli $P\widehat{A}Q$ e $P\widehat{R}Q$, essendo angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco PQ. D’altro canto $P\widehat{A}Q=P\widehat{B}Q$ per ipotesi. Dunque $P\widehat{B}Q=P\widehat{R}Q$. Il che è assurdo essendo $P\widehat{B}Q>P\widehat{R}Q$ dal momento che $P\widehat{B}Q$ è un angolo esterno del triangolo PBR e perciò maggiore di ciascuno dei due angoli interni ad esso non adiacenti e in particolare di $P\widehat{R}Q$. Dobbiamo concludere che l’ipotesi fatta, che cioè il punto B sia interno a k è da scartare. Il puto B non è interno a k.

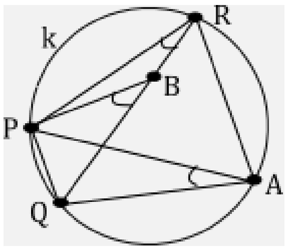

figura 3

Lo stesso ragionamento permette di escludere che il punto B sia esterno a k. C’è, ad onor del vero, una differenza: che adesso l’angolo $P\widehat{R}Q$ dovrebbe essere contemporaneamente maggiore e uguale all’angolo $P\widehat{B}Q$.

In conclusione, il punto B è situato sulla circonferenza k e pertanto i punti A, B, P, Q individuano un quadrilatero ciclico.

Passiamo alla DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA.

Fermiamo l’attenzione su due dei tre triangoli ABL, BCH, CAK, scelti arbitrariamente, per esempio sui triangoli ABL e CAK (figura 4). Chiamiamo F il punto in cui le due rette LC e KB s’intersecano.

I due triangoli LAC e BAK sono uguali per avere LA=BA, AC=AK, $L\widehat{A}C=B\widehat{A}K$ e si corrispondono secondo la seguente tabella: $\begin{pmatrix} L & A & C \\ B & A & K \end{pmatrix}$. Di conseguenza risulta: $A\widehat{C}L=A\widehat{K}B$, $A\widehat{L}C=A\widehat{B}K$.

Seguono due conclusioni fondamentali:

- il segmento AF è visto dai punti B ed L sotto angoli uguali;
- il segmento AF è visto dai punti K e C sotto angoli uguali.

Si desume, per il lemma precedente, che i quadrilateri ALBF e AFCK sono entrambi ciclici.

Questo implica che gli angoli opposti del quadrilatero ALBF, cioè $A\hat{F}B$ e $A\hat{L}B$, sono supplementari, per cui essendo $A\hat{L}B=60°$, risulta $A\hat{F}B=120°$. Parimenti, sono supplementari gli angoli $A\hat{K}C$ e $A\hat{F}C$, ed essendo $A\hat{K}C=60°$, risulta $A\hat{F}C=120°$.

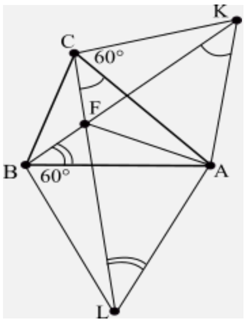

figura 4

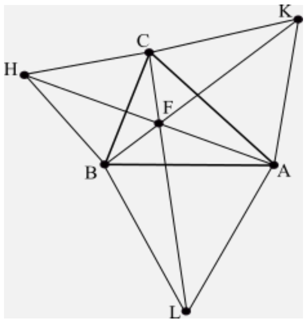

figura 5

Data l'arbitrarietà con cui sono stati scelti i lati del triangolo ABC, si desume che anche la congiungente i punti A e H passa per F e inoltre che l'angolo $B\hat{F}C$ misura 120° (figura 5). Questo, del resto, si può dimostrare direttamente, ripetendo il ragionamento precedente riferito, per esempio, ai lati AB e BC.

Com'è stato spiegato nell'articolo succitato il punto F è il punto di Fermat (o di Fermat-Torricelli).

5. Dimostrazione del teorema 4.

La dimostrazione che proporrò, quantunque mutuata da quella di Archimede [2], tuttavia se ne discosta in alcuni punti. Rimane comunque abbastanza complicata e richiede molta concentrazione.

Bisogna poi chiarire che il segmento sferico cui si riferisce Archimede è quello che oggi denominiamo "segmento sferico ad una base" e quando Archimede parla di superficie del segmento sferico si riferisce, in realtà, a quella che per noi è la "calotta sferica".

La dimostrazione presuppone inoltre la conoscenza delle seguenti formule relative alle misure dei solidi (figura 6):

- il volume del segmento sferico ad una base, di altezza h, tratto da una sfera di raggio r è: $V = \frac{1}{3}\,\pi\, h^2(3r - h)$;
  in particolare, il volume dell'emisfero (h=r) è: $V = \frac{2}{3}\,\pi\, r^3$;
- l'area di una calotta sferica di altezza h, tratta da una superficie sferica di raggio r è (figura 6): $S=2\pi rh$; in particolare, l'area della semisfera (h=r) è $S=2\pi r^2$.

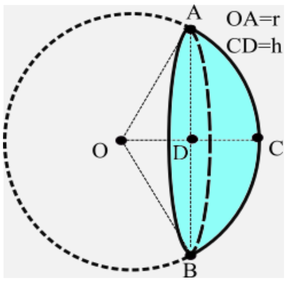

figura 6

La dimostrazione del teorema presuppone anche la conoscenza della seguente proprietà, che assumeremo come lemma e di cui forniamo la dimostrazione.

LEMMA. Di due rettangoli di uguale perimetro, ha area maggiore il rettangolo il cui lato minore è maggiore del lato minore dell'altro rettangolo.

DIMOSTRAZIONE. Siano il rettangolo di dimensioni a, b (con $a<b$) e il rettangolo di dimensioni c, d (con $c<d$). Vogliamo dimostrare che se è $a+b=c+d$ e $a>c$ allora risulta $ab>cd$ (figura 7).

Essendo $a>c$, esiste una lunghezza h tale che $a=c+h$, per cui $ab = (c+h) \cdot b = bc+bh$.

Di conseguenza, essendo $a+b=c+d$ e quindi $c+h+b=c+d$, risulta $d=b+h$, per cui:

$$cd = c \cdot (b+h) = bc+ch.$$

D'altro canto, essendo $b>a$ e $a>c$, risulta $b>c$ e perciò, moltiplicando per h entrambi i membri di quest'ultima uguaglianza, risulta $bh>ch$ e, di conseguenza: $bc+bh>bc+ch$, ossia $ab>cd$.

---

[2] Cfr.: ARCHIMEDE, *Opere* (a cura di Attilio Frajese), Torino, UTET, 1974, pagg. 209-211.

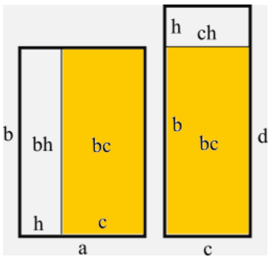

figura 7

Passiamo alla dimostrazione del teorema, ribadendo che si tratta di una dimostrazione piuttosto complessa.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Sono date due sfere (figura 8): una avente come cerchio massimo il cerchio di diametro AB e centro O, l'altra avente come cerchio massimo il cerchio di diametro PQ e centro H.

Si taglia la prima sfera con un piano perpendicolare al suo diametro AB in un punto M diverso dal centro O, il quale piano interseca la sfera secondo il cerchio di diametro CD. In questo modo la sfera risulta suddivisa in due segmenti sferici (ad una base): poniamo l'attenzione sul minore di essi, che denominiamo "segmento CAD", avente come base il cerchio di diametro CD e come altezza il segmento AM (nulla cambia se ragioniamo sull'altro segmento sferico).

Si taglia la seconda sfera con il piano perpendicolare al suo diametro PQ nel centro H, il quale piano interseca la sfera secondo il cerchio di diametro RS. In questo modo la sfera risulta suddivisa in due emisferi: poniamo l'attenzione sull'emisfero avente per altezza PH e lo chiamiamo "emisfero RPS".

Sotto la condizione che l'area della superficie dell'emisfero ricavato nella seconda sfera sia uguale all'area della superficie della calotta sferica ricavata nella prima sfera, andiamo a dimostrare che il volume dell'emisfero è maggiore del volume del segmento sferico.

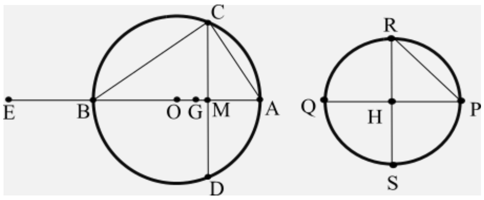

figura 8

Intanto incominciamo a vedere a quale conclusione, quantunque parziale, conduce la condizione suddetta.

Consideriamo allora la calotta sferica che delimita il segmento sferico CAD e la chiamiamo "calotta CAD". L'area della sua superficie è: $S(\text{calotta CAD}) = 2\,\pi\,\overline{OA}\cdot\overline{AM}$. Siccome $2\,\overline{OA} = \overline{AB}$ e, inoltre, per il 1° teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo CAB: $\overline{AB}\cdot\overline{AM} = \overline{AC}^2$, allora:

$$S(\text{calotta CAD}) = \pi\,\overline{AC}^2\,.$$

D'altro canto: $S(\text{emisfero RPS}) = 2\,\pi\,\overline{PH}^2$. E poiché $\overline{RP} = \overline{PH}\sqrt{2}$ e quindi $\overline{RP}^2 = 2\,\overline{PH}^2$, allora:

$$S(\text{emisfero RPS}) = \pi\,\overline{RP}^2\,.$$

Dunque, avendo ipotizzato che S(calotta CAD) = S(emisfero RPS), risulta: AC=RP.

A questo punto, ragionando sui triangoli rettangoli CMA e RHP, aventi uguale ipotenusa, e tenendo presente che CM>AM e RH=PH, utilizzando il teorema di Pitagora si dimostra facilmente che PH>AM.

Occupiamoci adesso dei volumi dei due solidi. Il volume del segmento sferico CAD è il seguente:

$$V(\text{segmento CAD}) = \frac{\pi}{3}\overline{AM}^2\cdot\left(3\,\overline{OA} - \overline{AM}\right).$$

Preso ora sulla retta AB, dalla parte di B, il punto E tale che $\overline{AE} = 3\,\overline{OA}$, risulta: $3\,\overline{OA} - \overline{AM} = \overline{EM}$. Cosicché:

$$V(\text{segmento CAD}) = \frac{\pi}{3}\overline{AM}^2\cdot\overline{EM}\,.$$

Immaginiamo adesso sulla retta AB un punto F tale che il cono di altezza FM e raggio di base CM abbia volume uguale a quello del segmento sferico. Siccome:

$$V(\text{cono FCD}) = \frac{\pi}{3}\,\overline{CM}^2\cdot\overline{FM}\,,$$

deve essere: $\overline{AM}^2\cdot\overline{EM} = \overline{CM}^2\cdot\overline{FM}$, o anche, tenendo presente il 2° teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo ABC, per cui $\overline{CM}^2 = \overline{AM}\cdot\overline{BM}$, si ha:

$$\overline{AM}^2 \cdot \overline{EM} = \left(\overline{AM} \cdot \overline{BM}\right) \cdot \overline{FM}\,, \quad \text{ossia: } \overline{AM} \cdot \overline{EM} = \overline{BM} \cdot \overline{FM}\,.$$

Prendiamo ora, internamente ad AB, il punto G tale che AG=PH. Essendo PH>AM, risulta AG>AM. Fermiamo l'attenzione su due rettangoli: quello di lati AM e BM e quello di lati AG e BG. Essendo AM+BM=AG+BG, i due rettangoli hanno lo stesso perimetro. Di essi, pertanto, ha area maggiore quello il cui lato minore risulta maggiore del lato minore dell'altro rettangolo. Siccome il lato minore del primo rettangolo (cioè AG) è maggiore del lato minore del secondo rettangolo (cioè AM), dobbiamo concludere che il secondo rettangolo ha area maggiore del primo. Vale a dire: $\overline{AG} \cdot \overline{BG} > \overline{AM} \cdot \overline{BM}$.

Tenendo allora presente che AC=RP e AG=PH e sostituendo nella relazione, già evidenziata, $\overline{RP}^2 = 2\,\overline{PH}^2$, otteniamo la seguente uguaglianza: $\overline{AC}^2 = 2\,\overline{AG}^2$.

Ma abbiamo visto che è pure $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = \overline{AC}^2$ e dunque, tenendo presente che $\overline{AB} = 2\,\overline{OA} = 2\,\overline{BE}$, risulta: $\overline{AC}^2 = 2\,\overline{BE} \cdot \overline{AM}$. Si ha pertanto: $2\,\overline{AG}^2 = 2\,\overline{BE} \cdot \overline{AM}$ e dunque $\overline{AG}^2 = \overline{BE} \cdot \overline{AM}$

Allora, dalle due relazioni $\overline{AG} \cdot \overline{BG} > \overline{AM} \cdot \overline{BM}$ e $\overline{AG}^2 = \overline{BE} \cdot \overline{AM}$, sommando membro a membro, si ottiene:

$$\overline{AG} \cdot \overline{BG} + \overline{AG}^2 > \overline{AM} \cdot \overline{BM} + \overline{BE} \cdot \overline{AM}, \quad \text{ossia:} \quad \overline{AG} \cdot \left(\overline{BG} + \overline{AG}\right) > \overline{AM} \cdot \left(\overline{BM} + \overline{BE}\right).$$

E dunque, costatato che $\overline{BG} + \overline{AG} = \overline{AB}$ e $\overline{BM} + \overline{BE} = \overline{EM}$, risulta: $\overline{AG} \cdot \overline{AB} > \overline{AM} \cdot \overline{EM}$.

Da qui, moltiplicando entrambi i membri per $\overline{AM}$, segue: $\overline{AG} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AM} > \overline{AM}^2 \cdot \overline{EM}$.

D'altro canto, abbiamo già visto che vale quest'altra relazione: $\overline{AM}^2 \cdot \overline{EM} = \overline{CM}^2 \cdot \overline{FM}$.

E abbiamo visto pure che è: $\overline{AB} \cdot \overline{AM} = \overline{AC}^2 = \overline{RP}^2$.

Cosicché, sostituendo nella prima di queste ultime tre relazioni, $\overline{RP}^2$ al posto di $\overline{AB} \cdot \overline{AM}$ e $\overline{CM}^2 \cdot \overline{FM}$ al posto di $\overline{AM}^2 \cdot \overline{EM}$, si ottiene: $\overline{AG} \cdot \overline{RP}^2 > \overline{CM}^2 \cdot \overline{FM}$.

Osserviamo adesso che, essendo $\overline{RP}^2 = 2\,\overline{PH}^2$ e $\overline{PH} = \overline{AG}$, si ha:

$$\mathrm{V(emisfero\ RPS)} = \frac{2}{3}\,\pi\,\overline{PH}^3 = \frac{\pi}{3}\,\overline{PH} \cdot \overline{RP}^2 = \frac{\pi}{3}\,\overline{AG} \cdot \overline{RP}^2;$$

inoltre:

$$\mathrm{V(segmento\ CAD)} = \mathrm{V(cono\ FCD)} = \frac{\pi}{3}\,\overline{CM}^2 \cdot \overline{FM}\,.$$

Pertanto, avendo mostrato sopra che $\overline{AG} \cdot \overline{RP}^2 > \overline{CM}^2 \cdot \overline{FM}$, possiamo concludere infine che risulta:

V(emisfero RPS) > V(segmento CAD).

Come volevasi dimostrare.

6. Dimostrazione del teorema 5.

Proporrò una dimostrazione che ricalca concettualmente quella di Apollonio, ma con una traduzione abbastanza libera. In questa dimostrazione Apollonio fa riferimento ad un teorema (proposizione 11, libro I) che, almeno per ciò che ci interessa, assumerò come lemma, ma ne fornirò una semplice dimostrazione eseguita con il linguaggio della geometria analitica [(3)].

---

[3] Chi ne avesse voglia, competenze e interesse, può leggere qui di seguito la traduzione dal greco in latino dell'enunciato della proposizione 11 del libro I delle Coniche di Apollonio, che fornisce il filologo danese Johan Ludvig **Heiberg** (1854-1928) in un'opera del 1891:
Si conus per axem plano secatur et alio quoque plano secatur, quod basim coni secundum rectam ad basim trianguli per axem positi perpendicularem secat, et si praeterea diametrus sectionis lateri alterutri trianguli per axem positi parallela est, quaelibet recta,,quae a sectione coni parallela ducitur communi sectioni plani secantis basisque coni, usque ad diametrum sumpta quadrata aequalis erit rectangulo comprehenso recta ex diametro ab ea ad verticem abscisa sectionis aliaque quadam recta, quae ad rectam inter angulum coni verticemque sectionis positam rationem habet, quam quadratum basis trianguli per axem positi ad rectangulum reliquis duobus lateribus trianguli comprehensum; vocetur autem talis sectio parabola.

NOTA BENE. Nell'enunciato e nella dimostrazione, sia del teorema sia della proposizione che assumiamo come lemma, Apollonio afferma anche altre proprietà interessanti delle quali però non ci occupiamo. Prenderemo invece solo ciò che è utile al nostro scopo.
Ecco comunque, a titolo di curiosità, una traduzione (con qualche piccola licenza) dell'enunciato completo del teorema: *Sia CE l'asse della parabola e sia CZ uguale alla metà del* lato retto (che, come Apollonio, trasliamo in CM – figura 9), *e siano tracciati dal punto Z alla sezione ABC i segmenti ZH, ZT, ZB, ZA. Allora il minore dei segmenti tracciati dal punto Z verso la sezione ABC è il segmento CZ, e i segmenti vicino a questo sono più corti di quelli lontani. Inoltre il quadrato di questi è uguale al quadrato di CZ più il quadrato del segmento che unisce il punto C al piede della perpendicolare condotta dal punto stesso*.

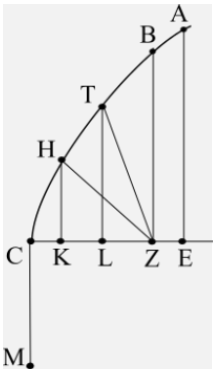

figura 9

LEMMA. È data la parabola di vertice V e fuoco F e sia M uno dei due punti in cui la interseca la perpendicolare al suo asse condotta per F. Preso sulla parabola un qualsiasi punto Q, dalla parte di M rispetto all'asse VF, e indicata con H la sua proiezione ortogonale sull'asse della parabola, si ha: $2\,\overline{FM}\cdot\overline{VH}=\overline{HQ}^2$.

DIMOSTRAZIONE. Si riferisce il piano della parabola (in realtà, allo stesso modo di Apollonio, ci basta considerare una "semi-parabola") ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) in modo che l'origine O coincida con il vertice V della parabola e l'asse x con l'asse VF della parabola orientato da V verso F (figura 10). L'equazione della parabola è allora $x=ay^2$, dove a è un parametro reale positivo. In questo modo il fuoco F avrà coordinate $\left(\frac{1}{4a}\,,0\right)$ e il punto M avrà coordinate $\left(\frac{1}{4a}\,,\frac{1}{2a}\right)$. Dunque: $\overline{FM}=\frac{1}{2a}$.

Preso sulla parabola un qualsiasi punto Q, dalla parte di M rispetto all'asse x, sia H la sua proiezione ortogonale sull'asse x. Indicata con q l'ascissa di Q, le sue coordinate sono $\left(q\,,\sqrt{\frac{q}{a}}\right)$, mentre quella di H sono (q, 0). Si ha pertanto: $\overline{VH}=q$ e $\overline{HQ}^2=\frac{q}{a}$. Di conseguenza, essendo $2\,\overline{FM}\cdot\overline{VH}=2\cdot\frac{1}{2a}\cdot\frac{q}{a}=\frac{q}{a}$, risulta dimostrato il lemma.

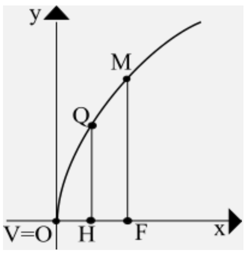

figura 10

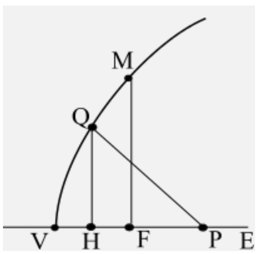

figura 11

Passiamo alla dimostrazione del teorema, che è sostanzialmente una riproduzione di quella di Apollonio.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Sia VE l'asse della parabola (semi-parabola – figura 11) e sia VP uguale alla metà del suo *lato retto*, cioè VP=FM. Si traccia dal punto P il segmento PQ, dove Q è un qualsiasi punto della parabola (semi-parabola). Vogliamo dimostrare che si ha: VP<PQ. Questo permette di affermare che, tra i segmenti che congiungono P con punti della parabola, VP è il minore.

Al riguardo, si traccia il segmento QH, dove H è l proiezione ortogonale di Q sull'asse della parabola. Per il lemma precedente risulta: $2\,\overline{FM}\cdot\overline{VH}=\overline{HQ}^2$. Ma, essendo VP=FM, risulta pure: $2\,\overline{VP}\cdot\overline{VH}=\overline{HQ}^2$. Da qui, sommando $\overline{HP}^2$ ad entrambi i membri, segue: $2\,\overline{VP}\cdot\overline{VH}+\overline{HP}^2=\overline{HQ}^2+\overline{HP}^2$. Siccome, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo QHP, si ha: $\overline{HQ}^2+\overline{HP}^2=\overline{PQ}^2$, allora risulta: $2\,\overline{VP}\cdot\overline{VH}+\overline{HP}^2=\overline{PQ}^2$.

Ora, si costata che VP–VH=HP, per cui: $\left(\overline{VP}-\overline{VH}\right)^2=\overline{HP}^2$, ossia: $\overline{VP}^2-2\,\overline{VP}\cdot\overline{VH}+\overline{VH}^2=\overline{HP}^2$; e quindi: $2\,\overline{VP}\cdot\overline{VH}+\overline{HP}^2=\overline{VP}^2+\overline{VH}^2$. Pertanto, in virtù della precedente uguaglianza, risulta: $\overline{PQ}^2=\overline{VP}^2+\overline{VH}^2$. Questo significa che $\overline{PQ}^2>\overline{VP}^2$ e quindi VP<PQ, che è quello che si voleva dimostrare.

7. Dimostrazione del teorema 6.

Anche adesso la dimostrazione proposta ricalca sostanzialmente quella di Apollonio e anche adesso c'è necessità di premettere un lemma che Apollonio, nella sua dimostrazione, richiama come proposizione 1 del libro V. Come nel caso precedente dimostreremo questo lemma con il supporto della geometria analitica [4].

LEMMA. È data l'ellisse di asse maggiore AB e centro C e sia F il suo fuoco più vicino ad A; sia poi M uno dei due punti in cui la perpendicolare al suo asse AB condotta per F interseca l'ellisse. Preso sulla parabola un qualsiasi punto Q e indicata con H la sua proiezione ortogonale sull'asse stesso, allora il quadrato costruito su QH ha area uguale a 2 volte quella del trapezio AHRT, essendo AT un segmento parallelo e uguale alla metà del *lato retto* dell'ellisse, cioè AT=FM, ed essedo R il punto in cui s'intersecano le rette OT e QH.

DIMOSTRAZIONE. Si riferisce il piano dell'ellisse (allo stesso modo di Apollonio, ci basta considerare una "semi-ellisse") ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) in modo che l'origine O coincida con il centro C della parabola e l'asse x con l'asse AB orientato da A verso B (figura 12).

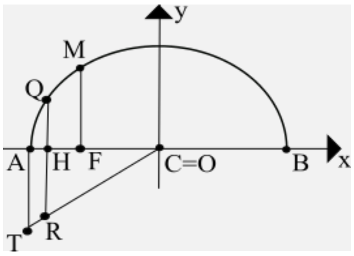

figura 12

L'equazione dell'ellisse è allora:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

dove a, b sono parametri reali positivi con a>b. In questo modo il fuoco F, il punto M e il punto T avranno coordinate rispettivamente:

$$F\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right),\quad M\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ \frac{b^2}{a}\right),\quad T\left(-a\,,-\frac{b^2}{a}\right).$$

Preso sull'ellisse un qualsiasi punto Q, sia H la sua proiezione ortogonale sull'asse x. Indicata con $-q$ l'ascissa di Q, le sue coordinate sono $\left(-q\,,\ \frac{b}{a}\sqrt{a^2-q^2}\right)$, mentre quella di H sono $(-q, 0)$.

Costatato adesso che le equazioni delle rette CT e QH sono nell'ordine:

$$y=\frac{b^2}{a^2}\,x\,,\quad x=-q\,,$$

si trovano le seguenti coordinate di R:

$$R\left(-q\,,-\frac{b^2q}{a^2}\right).$$

Si ottengono pertanto le seguenti misure:

[4] Vedi primo periodo del "Nota Bene" nel precedente paragrafo 6.

$$\overline{QH}^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-q^2),\ \ \overline{AT}=\frac{b^2}{a},\ \ \overline{HR}=\frac{b^2q}{a^2},\ \ \overline{AH}=a-q\,.$$

Si ha dunque:

$$2\ \text{Area}\ (AHRT)=2\cdot\frac{\overline{AT}+\overline{HR}}{2}\cdot\overline{AH}=\left(\frac{b^2}{a}+\frac{b^2q}{a^2}\right)\cdot(a-q)=\frac{b^2}{a^2}(a^2-q^2).$$

Cosicché $\overline{QH}^2$=2 Area (AHRT), vale a dire che il quadrato del lato QH ha area uguale al doppio di quella del trapezio AHRT, che è ciò che si doveva dimostrare.

Si capisce facilmente che, se Q' è il punto simmetrico di Q rispetto all'asse y ed H', T' sono nell'ordine i punti simmetrici di H, T rispetto all'origine O, essendo a sua volta B simmetrico di A (figura 13), risulta ancora: $\overline{Q'H'}^2=2\ \text{area}(BH'R'T')$.

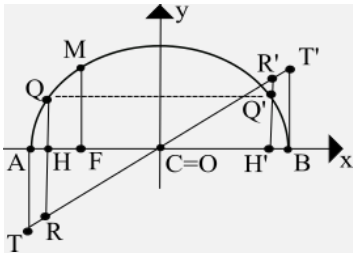

figura 13

Passiamo adesso alla dimostrazione del teorema, che è concettualmente, di nuovo, una riproduzione di quella di Apollonio, ma con un linguaggio, specialmente quello simbolico, del tutto diverso.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. Sia l'ellisse (semi-ellisse – figura 14) di asse maggiore AB e sia F un suo fuoco e C il suo centro. Si prende, internamente al segmento AB, il punto P tale che PA sia uguale alla metà del *lato retto*, ossia PA=FM. Si dimostra che:

- PA è il segmento più corto tra quelli che congiungono P con punti dell'ellisse;
- PB è quello più lungo.

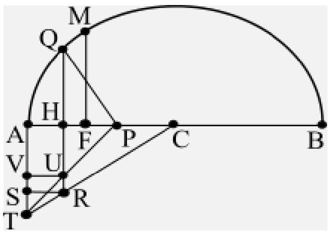

figura 14

- Incominciamo a dimostrare che PA è il più corto tra i segmenti che congiungono P con punti dell'ellisse. Per questo prendiamo sull'ellisse, più vicino ad A piuttosto che a B, un generico punto Q. Basta dimostrare che PA<PQ.

Sia allora AT un segmento parallelo e uguale alla metà del *lato retto* dell'ellisse, cioè AT=FM e siano R ed U i punti in cui la retta QH; perpendicolare all'asse AB condotta per il punto Q, interseca rispettivamente le rette CT e PT. Siano poi S e V i punti in cui la retta AT interseca rispettivamente le rette parallele ad AB, condotte per R ed U.

Sappiamo, in virtù del lemma precedente, che $\overline{QH}^2=2$ area (AHRT).

Osserviamo adesso che, essendo PA=AT, poiché entrambi i segmenti sono uguali a FM, risulta anche PU=HU, per cui: $\overline{PH}^2=2$ area(PHU).

Si ha, d'altro canto, in virtù del teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo PHQ:

$$\overline{PQ}^2=\overline{QH}^2+\overline{PH}^2=2\ \text{area}(AHRT)+2\ \text{area}(PHU).$$

Siccome area(AHRT)=area(AHUT)+area(URT), allora si ha:

$$\overline{PQ}^2 = 2\ [\text{area}(AHUT) + \text{area}(URT) + \text{area}(PHU)]$$

D'altro canto: $\text{area}(AHUT) + \text{area}(PHU) = \text{area}(PAT)$, pertanto: $\overline{PQ}^2 = 2\ [\text{area}(PAT) + \text{area}(URT)]$.

Ma $2\ \text{area}(PAT) = \overline{PA}^2$, per cui:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PA}^2 + 2\ \text{area}(URT)\ .$$

Questo significa che $\overline{PQ}^2 > \overline{PA}^2$ e quindi $PA < PQ$, che è quello che si voleva dimostrare.

- Passiamo a dimostrare che PB è il più lungo tra i segmenti che congiungono P con punti dell'ellisse. Per questo, ma solo per comodità, costruiamo una nuova figura (figura 15).

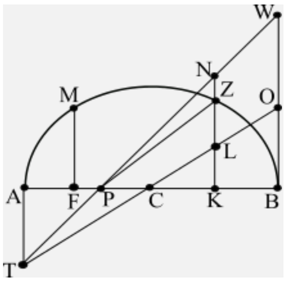

figura 15

Prendiamo sull'ellisse, ma questa volta più lontano da A rispetto a B, un generico punto Z.

Basta dimostrare che $PB > PZ$.

Si indica con K il piede della perpendicolare condotta da Z ad AB. Si chiamano W ed O i punti in cui la retta TP e la retta TC nell'ordine intersecano la perpendicolare all'asse AB condotta per B.

Incominciamo a calcolare $\overline{PZ}^2$, osservando subito che si ha: $\overline{PZ}^2 = \overline{KP}^2 + \overline{KZ}^2$.

Ora, in virtù del precedente lemma, risulta: $\overline{KZ}^2 = 2\ \text{area}(KBOL)$.

Inoltre, in considerazione del fatto che $PA=AT$ implica $KP=KN$, si ha: $\overline{KP}^2 = 2\ \text{area}(PKN)$.

Risulta pertanto: $\overline{PZ}^2 = \overline{KP}^2 + \overline{KZ}^2 = 2\ [\text{area}(PKN) + \text{area}(KBOL)]$.

D'altro canto, si ha:

$$\text{area}(PKN) + \text{area}(KBOL) = \text{area}(PCLN) + \text{area}(CKL) + \text{area}(KBOL) = \text{area}(PCLN) + \text{area}(CBO).$$

Dunque: $\overline{PZ}^2 = 2\ [\text{area}(PCLN) + \text{area}(CBO)]$.

Ma $\text{area}(CBO) = \text{area}(CAT)$, per cui: $\overline{PZ}^2 = 2\ [\text{area}(PCLN) + \text{area}(CAT)]$.

E siccome $\text{area}(PCLN) + \text{area}(CAT) = \text{area}(PAT) + \text{area}(TLN)$, allora: $\overline{PZ}^2 = 2\ [\text{area}(PAT) + \text{area}(TLN)]$.

Occupiamoci adesso di $\overline{PB}^2$, costatando subito che, essendo $PB=BW$, si ha: $\overline{PB}^2 = 2\ \text{area}(PBW)$.

Ma si ha pure: $\text{area}(PBW) = \text{area}(PCOW) + \text{area}(CBO) = \text{area}(PCOW) + \text{area}(CAT) =$
$= \text{area}(PCOW) + \text{area}(PTC) + \text{area}(PAT) = \text{area}(WTO) + \text{area}(PAT)$.

Pertanto: $\overline{PB}^2 = 2\ [\text{area}(WTO) + \text{area}(PAT)]\ .$

Risulta allora: $\overline{PB}^2 - \overline{PZ}^2 = 2\ [\text{area}(WTO) + \text{area}(PAT)] - 2\ [\text{area}(PAT) + \text{area}(TLN)] =$
$= 2\ [\text{area}(WTO) - \text{area}(TLN)] = 2\ \text{area}(WNLO)$.

Da ciò si desume che è $\overline{PB}^2 > \overline{PZ}^2$ e perciò $PB > PZ$, che è quello che si doveva dimostrare.