Dimostrazione.

In virtù di un noto teorema, il punto D divide il lato BC in due parti, BD e DC, direttamente proporzionali ai lati AB e AC, per cui si ha:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\ , \quad \text{ossia:} \quad \frac{\overline{BD}}{a - \overline{BD}} = \frac{c}{b}\ ; \quad \text{da cui segue:} \quad \overline{BD} = \frac{c\, a}{b + c}\,.$$

Si ha pertanto la seguente relazione vettoriale:

$$\overrightarrow{BD} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \cdot \overrightarrow{BC}\,, \quad \text{ossia:} \quad \overrightarrow{BD} = \frac{c}{b + c} \cdot \overrightarrow{BC}\,.$$

Da qui, passando alle componenti cartesiane dei vettori, segue:

$$x_D - x_B = \frac{c}{b + c}\,(x_C - x_B)\,, \quad y_D - y_B = \frac{c}{b + c}\,(y_C - y_B)\,.$$

E da qui, dopo alcuni semplici passaggi, seguono le due relazioni del primo gruppo.

Per le relazioni del secondo e terzo gruppo, si potrebbe ripetere lo stesso ragionamento, ma in realtà basta operare, in contemporanea, le seguenti permutazioni cicliche sulle relazioni del primo gruppo:

$$A \to B \to C \to A, \quad a \to b \to c \to a\,.$$

Nota Bene. L'idea di ricorrere alle equazioni delle bisettrici – che però non richiede il calcolo vettoriale – può andar bene se le coordinate dei vertici sono numeri ben precisi, ma non va bene se tali coordinate sono espresse da parametri generici. Il calcolo vettoriale va bene in ogni caso.