ASPETTI DIDATTICI

Il problema può fornire alcuni spunti in ambito didattico, non molto lontani dalla sensibilità dei giorni nostri:

1. Abituare gli studenti a formalizzare e matematizzare alcune situazioni «di realtà» (eventualmente in un laboratorio di Problem posing & Problem solving).

2. Favorire il superamento dei "nuclei tematici": separazione tra algebra, geometria, calcolo delle probabilità ecc. ecc.

3. Riflettere su come i problemi di fisica classica , solitamente proposti agli studenti mediante modelli essenzialmente deterministici, calati nella realtà mostrino il loro legame con il Calcolo delle probabilità e con la Statistica.

4. Nel problema è presente un esempio classico per l' introduzione delle variabili aleatorie continue, a distribuzione uniforme, servendosi di metodi elementari.

Lo studio delle variabili aleatorie continue richiede competenze di Analisi che lo studente acquisisce nell'ultimo anno di corso e, nel caso di distribuzioni bivariate , non sempre appannaggio dello studente liceali. I casi riducibili a modelli matematici elementari permettono un approccio «precoce» all'argomento, che sarà poi approfondito in una trattazione più generale.

Introdotta una rappresentazione insiemistica per gli eventi, è intuitivo, nel caso di insiemi continui, associare la probabilità ad una misura.
Nel caso di distribuzioni uniformi il concetto di densità di probabilità $f(x)$ può essere messo al confronto con il concetto di densità di massa, familiare agli studenti.

Per una variabile aleatoria X definita uniformemente in un intervallo $[a;b]$, si possono trovare per via elementare tutti i risultati che, nel caso generale, si ottengono mediante il calcolo integrale

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & altrove \end{cases} \qquad P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx = 1 \quad P(h<X<k)=\int_h^k f(x)\,dx = \frac{k-h}{b-a}$$

Semplice è anche il passaggio al caso di distribuzioni uniformi bivariate, in un insieme Ω in $\boldsymbol{R^2}$:
la probabilità associata a un sottoinsieme A di Ω sarà $P(A)=\frac{ara\ di\ A}{area\ di\ \Omega}$

Esempi: due quesiti assegnati agli esami di Stato

1. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati) **(quesito 3- ordinaria PNI- 2009).**

2. Sia P un punto fissato su una circonferenza; quale è la probabilità che prendendo su questa due punti a caso A e B, l'angolo $A\widehat{P}B$ sia acuto? Si illustri il ragionamento seguito. **(quesito 10-suppletiva PNI- 2011)**

Temi da discutere e da sviluppare, eventualmente, alla luce delle più recenti proposte per l'insegnamento della Probabilità.

1. *Se noi non fossimo ignoranti non ci sarebbe probabilità, non vi sarebbe posto che per la certezza; ma la nostra ignoranza non può essere assoluta, altrimenti non ci sarebbe nemmeno la probabilità, dal momento che deve esservi ancora un po' di luce anche per pervenire a questa* ***scienza incerta****. I problemi di probabilità possono essere classificati a seconda della maggiore o minore profondità della nostra ignoranza.* **(H. Poincaré- La scienza e l'ipotesi)**

2. *Bruno de Finetti (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, alla domanda: "che cos'è la probabilità?" era solito rispondere: "la probabilità non esiste!". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?* **(Esami di Stato-ordinaria PNI 2006- quesito 7)**

3. La probabilità come misura

a) " *....Cosa significa misurare? Ogni tipo di misura procede con un metodo ben determinato, che entra in modo essenziale nella definizione della grandezza che si vuole misurare.. Ma se- con atteggiamento tipicamente matematico- prescindiamo dalle particolarità, ci accorgiamo che essi posseggono una caratteristica comune: far corrispondere a ciascun oggetto di un certo tipo un numero reale, che viene chiamato sua* ***misura****....."*
"..... gli esempi suggeriscono un' importante proprietà di cui godono molti procedimenti di misura: ***l'additività*****"**

"... *Alle varie esemplificazioni che abbiamo visto finora se ne può aggiungere una che forse il lettore avrà già trovato da sé :* ***la probabilità***"

" *Qualche volta può essere interessante procedere in senso opposto cioè, invece di valutare una probabilità mediante il calcolo di un'area, calcolare un'area con una valutazione di probabilità, da ottenere per via empirica (Metodo Monte Carlo) Abbiamo voluto presentare questo problema , anche se manchiamo a questo punto , di una base teorica che ci consenta di inquadrarlo con sicurezza , per stimolare il lettore ad una più approfondita conoscenza del calcolo delle probabilità*. **(G. Prodi- E.Magenes Elementi di Analisi matematica- 1982)**

b) *"... Domani, quando per calcolare un'area sarà molto più rapido e conveniente usare un metodo Monte Carlo anziché, ad esempio, calcolare un integrale, la definizione di area sarà sempre quella di Peano-Jordan (o anche di Lebesgue) o non, piuttosto, quella che può darsi mediante un'interpretazione probabilistica del concetto di area*?.."

(G. Fichera -Il calcolo infinitesimale alla soglia del 2000- Accademia dei Lincei 1993)

Una formulazione alternativa del problema di Chisini, alla luce delle considerazioni precedenti.

La prima richiesta si riduce a un classico problema di cinematica, la seconda a una semplice discussione di un sistema parametrico, la terza e la quarta si riferiscono al modello elementare di variabile aleatoria continua; la quarta, in particolare, può servire a saggiare la percezione intuitiva di probabilità che spesso ci trae in inganno.

Due persone hanno occasione di percorrere tutte le mattine un medesimo tratto di strada AB di lunghezza 4 km, l'una a piedi e l'altra in bicicletta.
La seconda parte alle ore 10 da A e si muove verso B con una velocità di 8 km/h ; la prima parte alle ore 10 e 12 minuti da B e si muove verso A alla velocità di 4 km/h.

a) Stabilire se si incontrano o no nel loro tragitto.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}\text{ì} - \boldsymbol{in\ un\ punto\ distante\ 3,2\ km\ da\ A} \\ \boldsymbol{alle\ \ ore\ 10\ e\ 24\ minuti} \end{bmatrix}$$

b) Entro quale arco di tempo deve partire la prima persona affinché possano incontrarsi?

$$[\boldsymbol{dalle\ ore\ 9\ alle\ ore\ 10\ e\ mezza}\ ]$$

c) Se il pedone parte (casualmente) tra le 8 e le 11 , qual è la probabilità che le due persone si incontrino? $[\mathbf{50}\%]$

d) Se, riguardo al punto c, il pedone si muove da A a B come il ciclista, la probabilità dell'incontro è uguale, maggiore o minore?

$$[\boldsymbol{minore}]$$