Inversione per raggi vettori reciproci
di Antonino Giambò

1. È data una circonferenza k di centro O e raggio r (figura 1). Ad ogni punto P del suo piano, distinto da O, è possibile associare un punto P', appartenente alla semiretta di origine O e passante per P, in modo che risulti:

(1) $\overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OP'}} = \mathrm{r}^2$.

Questa corrispondenza tra i punti P e P' si definisce **inversione (**o **trasformazione) per raggi vettori reciproci** o anche **inversione rispetto alla circonferenza k**. Circonferenza che a sua volta è detta *circonferenza fondamentale*, mentre il suo centro O è denominato *centro dell'inversione* e il quadrato del suo raggio, r^2, è denominato *potenza dell'inversione*. I punti P e P' si dicono l'uno *inverso* dell'altro. E mentre uno è interno a k l'altro è esterno. Infatti, se $\overline{\mathrm{OP}}>\mathrm{r}$, allora risulta $\frac{\mathrm{r}^2}{\overline{\mathrm{OP'}}}>\mathrm{r}$ e quindi $\overline{\mathrm{OP}}'<\mathrm{r}$; e viceversa.

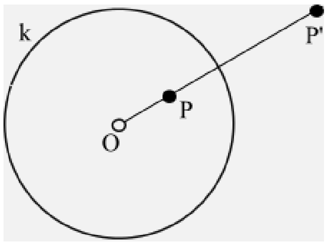

figura 1

L'inversione per raggi vettori reciproci è una *trasformazione involutoria*, vale a dire una trasformazione T che, composta con se stessa, produce l'identità I. Insomma: $\mathrm{T}\circ\mathrm{T}=\mathrm{I}$. Questo significa, in ultima analisi, che se essa trasforma il punto P nel punto P', una volta ripetuta trasforma P' in P. Più in generale: se l'inversione per raggi vettori reciproci trasforma una figura F in F', una volta ripetuta trasforma F' in F. Le due figure F ed F' si dicono l'una *inversa* dell'altra.

L'inversione per raggi vettori reciproci non stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano della circonferenza fondamentale a causa dell'eccezione rappresentata dal punto O. Ad esso, infatti, la (1) non associa alcun punto. Nondimeno, s'intuisce che quando il punto P si allontana indefinitamente da O, muovendosi sulla semiretta Op uscente da O, il punto P' si avvicina indefinitamente ad O. Questo ci consente di assumere la convenzione che si corrispondano il punto O e il *punto all'infinito* della semiretta Op. Con questa convenzione si stabilisce una *corrispondenza biunivoca* che riguarda tutti i punti del piano, senza eccezioni, purché ovviamente il piano si consideri arricchito con la cosiddetta *retta all'infinito* (o *retta impropria*); a condizione insomma che il piano sia *il piano proiettivo*.

2. Ci soffermiamo adesso sulla costruzione per via sintetica dei punti corrispondenti di punti assegnati in una data inversione per raggi vettori reciproci.

- Cominciamo con la costruzione del punto P' inverso di P nell'inversione rispetto ad una data circonferenza k, di centro O e raggio r. Bisogna distinguere diversi casi.

- Se il punto P è interno a k (figura 2), si traccia per P la perpendicolare alla retta OP. Indicato con A uno dei due punti in cui essa interseca k e tracciata la tangente a k in A, si chiami P' il punto in cui questa tangente incontra la retta OP: P' è il punto cercato. Si spiega infatti facilmente che risulta: $\overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OP}}'=\mathrm{r}^2$.

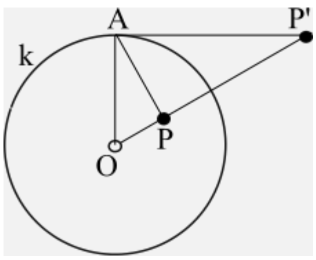

figura 2

- Se invece P è esterno a k, basta invertire il ragionamento precedente (figura 2, con scambio di posto tra P e P'): si conduce per P una tangente a k e, detto A il punto di contatto, si traccia per A la perpendicolare alla retta OP. Essa interseca OP nel punto P': è il punto cercato.
- Se infine il punto P appartiene alla circonferenza k allora P' coincide con P, cosa che si spiega facilmente. Come dire che la circonferenza fondamentale è luogo di punti uniti rispetto all'inversione.

- Una volta che sono stati assegnati il centro O dell'inversione e una coppia di punti corrispondenti P, P', è possibile costruire l'inverso di un qualsiasi altro punto Q.

Vediamo in che modo.

Osserviamo anzitutto che se P, P' e Q, Q' sono coppie di punti che si corrispondono nell'inversione avente centro in O e potenza r^2, senza essere allineati, risulta:

$$\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2 \quad \text{e} \quad \overline{OQ}\cdot\overline{OQ'}=r^2\,, \quad \text{per cui è:} \quad \overline{OP}\cdot\overline{OP'}=\overline{OQ}\cdot\overline{OQ'}.$$

Questo implica che i 4 punti P, P', Q, Q' sono situati su una medesima circonferenza.

Infatti, considerata la circonferenza γ, individuata dai punti non allineati P, P', Q (figura 3), in virtù del noto teorema delle secanti, si ha: $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=\overline{OQ}\cdot\overline{OQ_1}$, avendo chiamato Q_1 l'altro punto in cui OQ interseca γ. Confrontando questa relazione con la precedente, si conclude che deve essere $Q_1=Q'$. Quindi Q' si trova sulla circonferenza γ, sulla quale sono situati i punti P, P', Q.

A questo punto, ai fini della costruzione del punto Q', corrispondente di Q nell'inversione, bisogna considerare due situazioni a seconda che il punto Q non sia allineato con i punti P, P' o che lo sia.

Nel primo caso, una volta assegnata la coppia di punti P, P', corrispondenti nell'inversione di centro O e preso un qualsiasi punto Q, non allineato con i punti P e P', il punto Q', inverso di Q, è esattamente l'altro punto in cui la retta OQ interseca la circonferenza γ individuata dai punti P, P', Q (figura 3).

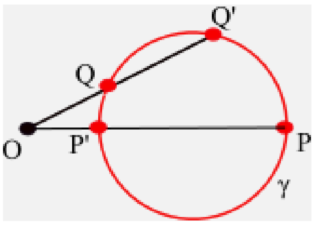

figura 3

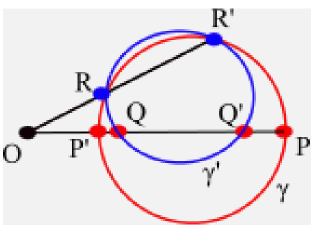

figura 4

Nel secondo caso (figura 4), si prende dapprima un punto ausiliario R non allineato con P e P' e si costruisce il punto R' corrispondente di R nell'inversione attraverso il disegno della circonferenza γ, passante per i punti non allineati P, P', R. Successivamente, attraverso il disegno della circonferenza γ', passante per i punti non allineati R, R', Q, si costruisce il punto Q' cercato.

3. Ancora con considerazioni di geometria sintetica si possono dimostrare altre importanti proprietà dell'inversione: ce ne occuperemo più avanti.

Al momento andiamo a dimostrare queste proprietà con l'uso della geometria analitica.

Per questo abbiamo però bisogno prima di tutto di trovare le equazioni dell'inversione.

Supponiamo allora che il piano della circonferenza k, di centro O e raggio r, sia riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), avente l'origine proprio nel centro O dell'inversione (figura 5)

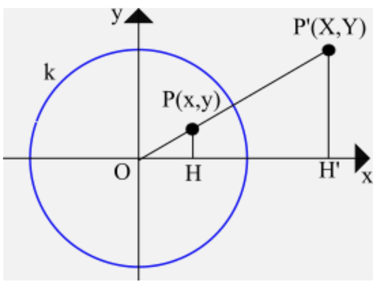

figura 5

Siano (x,y) le coordinate del generico punto P del piano, distinto da O, e (X,Y) quelle del suo corrispondete P' nell'inversione rispetto alla circonferenza k. Si ha evidentemente:

$$\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \overline{OP'}=\sqrt{X^2+Y^2}\,.$$

Considerato che i punti P e P' sono allineati con O, deve risultare:

$$\frac{OH'}{OH}=\frac{H'P'}{HP}, \quad \text{vale a dire:} \quad \frac{X}{x}=\frac{Y}{y},$$

per cui, se diciamo h il rapporto uguale, deve essere:

$$X = h\,x, \quad Y = h\,y.$$

Siccome $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$, si ha:

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{X^2+Y^2}=r^2 \quad \text{e quindi:} \quad \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{(hx)^2+(hy)^2}=r^2;$$

da cui segue:

$$h=\frac{r^2}{x^2+y^2}.$$

Le equazioni dell'inversione per raggi vettori reciproci di potenza r^2, la quale trasforma il punto (x,y) nel punto (X,Y), sono pertanto le seguenti:

(2)
$$X=\frac{r^2\,x}{x^2+y^2}, \quad Y=\frac{r^2\,y}{x^2+y^2}.$$

Da esse, ricordando che X=hx e Y=hy, si ottengono le equazioni della trasformazione inversa, cioè le equazioni della trasformazione che muta il punto (X,Y) nel punto (x,y):

(3)
$$x=\frac{r^2\,X}{X^2+Y^2}, \quad y=\frac{r^2\,Y}{X^2+Y^2}.$$

Come si può notare, le (3) si ottengono direttamente dalle (2) scambiando fra loro x con X e y con Y.

4. Possiamo dimostrare adesso le proprietà cui abbiamo accennato prima.

PROPRIETÀ 1. *Ogni retta passante per il centro dell'inversione è trasformata in se stessa*.

DIMOSTRAZIONE.

Sia ax+by=0 una generica retta passante per O. Sostituendo al posto di x, y le espressioni (3), si ottiene:

$$a\cdot\frac{r^2\,X}{X^2+Y^2}+b\cdot\frac{r^2\,Y}{X^2+Y^2}=0, \quad \text{da cui segue facilmente:} \quad aX+bY=0.$$

Ossia, ritornando alle coordinate correnti x, y: ax+by=0. Vale a dire la stessa retta assegnata. Cosicché la retta è retta unita, ma non è luogo di punti uniti.

PROPRIETÀ 2. *Ogni retta* s *non passante per il centro* O *dell'inversione è trasformata in una circonferenza passante per* O, *la quale ha in* O *tangente parallela alla retta* s.

DIMOSTRAZIONE.

Sia una generica retta s di equazione ax+by+c=0, con c≠0 e a, b non contemporaneamente nulli. Sostituendo al posto di x, y le espressioni (3), si ottiene:

$$a\cdot\frac{r^2\,X}{X^2+Y^2}+b\cdot\frac{r^2\,X}{X^2+Y^2}+c=0, \quad \text{da cui segue:} \quad X^2+Y^2+\frac{a\,r^2}{c}X+\frac{b\,r^2}{c}Y=0.$$

Vale a dire una circonferenza passante per il centro O dell'inversione.

Si costata inoltre che la retta tangente in O a questa circonferenza ha equazione aX+bY=0 ed è perciò parallela alla retta s.

Ragionando allo stesso modo si possono dimostrare queste altre due proprietà dell'inversione:

PROPRIETÀ 3. *Ogni circonferenza passante per il centro* O *dell'inversione è trasformata in una retta non passante per* O *e parallela alla tangente in* O *alla circonferenza.*

PROPRIETÀ 4. *Ogni circonferenza non passante per il centro* O *dell'inversione è trasformata in una circonferenza non passante per* O. In particolare: *la circonferenza fondamentale è trasformata in se stessa.*

Infine, con un ragionamento un po' più articolato, si dimostra quest'altra proprietà:

PROPRIETÀ 4. *L'angolo formato da due rette è uguale all'angolo formato dalle linee corrispondenti nell'inversione.*

5. La trasformazione per raggi vettori reciproci permette di risolvere questioni interessanti con procedimenti alternativi a quelli ordinari.

Qualche esempio.

ESERCIZIO 1. Risolvere per valori reali il seguente sistema nelle incognite x, y:

$$\begin{cases} 2\,(x^2+y^2)^2 - x\,y = 0 \\ x^2+y^2+x-y=0 \end{cases}$$

RISOLUZIONE. Possiamo concepire le due equazioni che compongono il sistema come le equazioni di due curve assegnate in un riferimento cartesiano (Oxy). L'inversione per raggi vettori reciproci permette di trasformare le due equazioni in altrettante più semplici da gestire. Precisamente, il sistema, in base alle equazioni (3), diventa:

$$\begin{cases} 2\left[\left(\dfrac{r^2\,X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(\dfrac{r^2\,Y}{X^2+Y^2}\right)^2\right]^2-\dfrac{r^2\,X}{X^2+Y^2}\cdot\dfrac{r^2\,Y}{X^2+Y^2}=0 \\ \left(\dfrac{r^2\,X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(\dfrac{r^2\,Y}{X^2+Y^2}\right)^2+\dfrac{r^2\,X}{X^2+Y^2}-\dfrac{r^2\,Y}{X^2+Y^2}=0 \end{cases}$$

Ossia, dopo alcune semplici elaborazioni:

$$\begin{cases} X\,Y = 2\,r^4 \\ X-Y+r^2=0 \end{cases}$$

Questo sistema, di facile risoluzione, fornisce le seguenti soluzioni:

$$(X=r^2,\;\; Y=2\,r^2),\quad (X=-2\,r^2,\;\; Y=-r^2)\,.$$

A questo punto, si ricorre di nuovo alle equazioni (3) per ottenere le soluzioni del sistema assegnato.

Ecco, dunque, le soluzioni:

$$\left(x=\frac{r^2\cdot r^2}{r^4+4\,r^4}=\frac{1}{5}\,,\;\; y=\frac{r^2\cdot\;2\,r^2}{r^4+4\,r^4}=\frac{2}{5}\right),\quad \left(x=\frac{r^2\cdot(-2\,r^2)}{4\,r^4+r^4}=-\frac{2}{5}\,,\;\; y=\frac{r^2\cdot\;(-r^2)}{r^4+4\,r^4}=-\frac{1}{5}\right).$$

ESERCIZIO 2. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva di equazione:

$$2\,(x^2+y^2)^2-x\,y=0\,.$$

Trovarne le equazioni parametriche.

RISOLUZIONE. Consideriamo, per comodità, l'inversione per raggi vettori reciproci di potenza 1. In base alle equazioni (3) – dove abbiamo supposto $r=1$ – l'equazione della curva è trasformata nella seguente equazione:

$$X\,Y=2\,.$$

Posto allora: $X=t$, si ha: $Y=2/t$. Introducendo questi valori di X, Y nelle (3) – dove, ribadisco, $r=1$ – si ottengono, a conti fatti, le equazioni parametriche della curva assegnata:

$$x=\frac{t^3}{t^4+4}\,,\quad y=\frac{2\,t}{t^4+4}\,.$$

ESERCIZIO 3. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva di equazione:

$$(x^2+y^2)^2+(x-y)(x^2+y^2)-x\,y=0\,.$$

Dimostrare che si tratta di una curva riducibile e determinare le equazioni delle curve componenti.

RISOLUZIONE. Consideriamo, per comodità, l'inversione per raggi vettori reciproci di potenza 1. In base alle equazioni (3) – dove abbiamo supposto $r=1$ – l'equazione della curva è trasformata nella seguente equazione:

$$(1+X)(1-Y)=0\,,$$

che si scompone nelle due equazioni seguenti:

$$1+X=0,\quad 1-Y=0.$$

Utilizzando, a questo punto, le equazioni (2), sempre con $r=1$, si ottengono le equazioni delle due curve in cui si scompone la curva assegnata:

$$x^2+y^2+x=0, \quad x^2+y^2-y=0\,.$$

Si tratta di due circonferenze passanti per il centro O dell'inversione (figura 6).

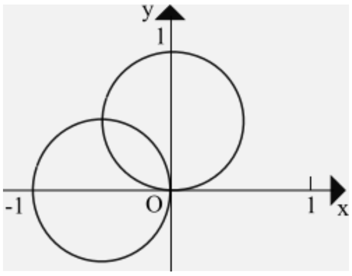

figura 6

Il ricorso all'inversione non è il metodo più economico per risolvere il precedente esercizio. Diciamo che abbiamo seguito quel metodo per fornire un ulteriore esempio di applicazione dell'inversione.

In realtà, la questione può essere risolta più rapidamente senza coinvolgere l'inversione. Basta considerare l'equazione assegnata come un'equazione di 2° grado nell'incognita x^2+y^2, il cui determinante è;

$$\Delta = (x-y)^2+4xy=(x+y)^2.$$

Per cui si ha:

$$x^2+y^2=\frac{-(x-y)\pm(x+y)}{2}=\left\langle \begin{matrix} y \\ -x \end{matrix} \right. .$$

Cosicché l'equazione assegnata può essere scritta nel modo seguente:

$$(x^2+y^2+x)(x^2+y^2-y)=0\,.$$

Da qui seguono le equazioni delle due circonferenze che compongono la curva assegnata.

6. Può essere interessante dimostrare le precedenti proprietà dell'inversione con procedimenti di geometria sintetica. È quello che andiamo a fare.

PROPRIETÀ 1. *Ogni retta passante per il centro dell'inversione è trasformata in se stessa*.

DIMOSTRAZIONE. Questa proprietà discende direttamente dalla definizione di inversione per raggi vettori reciproci. Infatti, ogni punto della retta è trasformato dall'inversione in un punto della retta medesima ma non in se stesso, ad eccezione del caso in cui il punto si trovi sulla circonferenza fondamentale. La quale retta è così trasformata in se stessa, ed è pertanto retta unita ma non luogo di punti uniti.

PROPRIETÀ 2. *Ogni retta* s *non passante per il centro* O *dell'inversione è trasformata in una circonferenza passante per* O, *la quale ha in* O *tangente parallela alla retta* s.

DIMOSTRAZIONE. Sia k la circonferenza fondamentale, di centro O e raggio r e sia s una generica retta non passante per O (figura 7). Indichiamo con A la proiezione ortogonale di O su s e con A' l'inverso di A nell'inversione rispetto alla circonferenza k.

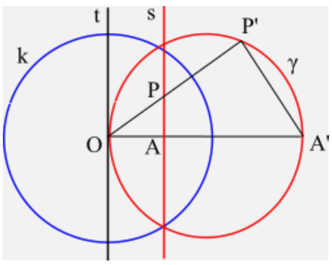

figura 7

Sia ora P un generico punto della retta s e sia P' il suo inverso. Siccome $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=r^2$ e $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$, allora risulta: $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OP}\cdot\overline{OP'}$, da cui segue: $\overline{OA'}/\overline{OP'}=\overline{OP}/\overline{OA}$. Si deduce, in virtù del 2° criterio di similitudine dei triangoli, che il triangolo OP'A' è simile al triangolo rettangolo OAP e pertanto è esso stesso rettangolo in P'.

Questo implica che, al variare di P su s, il punto P', inverso di P, varia in modo che l'angolo $O\widehat{P'}A'$ sia sempre un angolo retto e perciò P' descrive la circonferenza γ, di diametro OA'. Appunto una circonferenza passante per il centro O dell'inversione.

Si costata inoltre che, essendo OA perpendicolare alla retta s ed essendo la tangente t in O alla circonferenza γ perpendicolare ad OA, questa tangente t è parallela alla retta s. [c.v.d.]

PROPRIETÀ 3. *Ogni circonferenza passante per il centro* O *dell'inversione è trasformata in una retta non passante per* O *e parallela alla tangente in* O *alla circonferenza.*

DIMOSTRAZIONE. Questa proprietà discende direttamente dalla precedente, in ragione del fatto che l'inversione è una trasformazione involutoria.

In effetti, se alla retta s, perpendicolare alla retta OA' in A, corrisponde nell'inversione la circonferenza γ, di diametro OA' (figura 6), allora a questa circonferenza, in virtù della proprietà involutoria dell'inversione, corrisponde la retta s, la quale peraltro è parallela alla tangente t in O alla circonferenza γ.

PROPRIETÀ 4. *Ogni circonferenza non passante per il centro* O *dell'inversione è trasformata in una circonferenza non passante per* O. In particolare: *la circonferenza fondamentale è trasformata in se stessa.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione della seconda parte è implicita nel fatto, già evidenziato, che la circonferenza fondamentale è luogo di punti uniti.

Per la dimostrazione della prima parte bisogna distinguere due situazioni, a seconda che il centro O sia esterno o interno alla circonferenza assegnata.

- Prendiamo in esame il primo caso: la circonferenza è esterna al punto O.

Sia allora k la circonferenza fondamentale, di centro O e raggio r. Sia poi γ una generica circonferenza esterna al punto O e siano A il suo centro ed a il suo raggio (figura 8). Indichiamo con h, ovviamente costante, il segmento di tangente OT, condotto da O alla circonferenza γ. Diciamo inoltre P, Q i punti in cui una generica retta condotta per O interseca la circonferenza γ. Per il noto teorema della tangente e della secante, si ha: $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\overline{OT}^2$ e perciò: $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=h^2$. Se P', Q' sono rispettivamente gli omologhi dei punti P, Q rispetto alla trasformazione per raggi vettori reciproci, si ha: $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=\overline{OQ}\cdot\overline{OQ'}=r^2$.

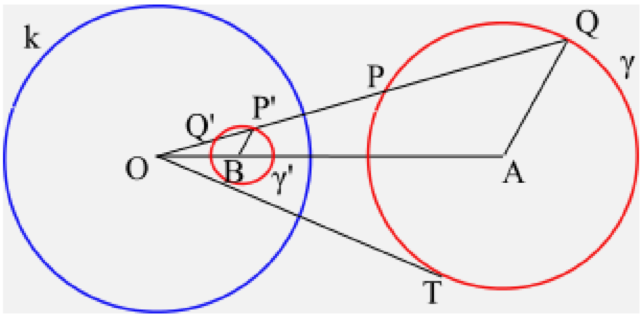

figura 8

Ragioniamo sul punto P', incominciando a tracciare per esso la parallela a QA e dicendo B il punto in cui essa interseca OA. È evidente che i due triangoli OP'B e OQA sono simili. Si ha pertanto:

$$\frac{\overline{BP'}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}.$$

Risulta, d'altro canto:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}\cdot\frac{\overline{OP}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OP}\cdot\overline{OP'}}{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}=\frac{r^2}{h^2}.$$

Ricordando allora che $\overline{AQ}=a$ e ragionando sulle due precedenti relazioni, si ricava:

$$\overline{BP'}=\overline{AQ}\cdot\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}=a\cdot\frac{r^2}{h^2}.$$

Cosicché, mentre P varia sulla circonferenza γ, il suo inverso P' varia in modo che la sua distanza da B si mantenga uguale alla quantità costante $a \cdot \frac{r^2}{h^2}$. Come dire che P' descrive la circonferenza γ', di centro B e raggio $a \cdot \frac{r^2}{h^2}$. Faccio notare che la circonferenza γ', come γ, è esterna al punto O.

Ad analogo risultato si perviene ragionando sul punto Q', nel senso che, mentre Q descrive γ, il suo inverso Q' descrive la medesima circonferenza γ'. Chiaramente adesso, ai fini della dimostrazione, bisogna prendere in considerazione la parallela a PA condotta per Q', ma il resto del ragionamento è uguale al precedente.

- Occupiamoci adesso del caso in cui il centro O dell'inversione è interno alla circonferenza assegnata.

Il ragionamento non è molto diverso dal precedente. Cambia infatti soltanto il ruolo della tangente e della secante: questo ruolo è assunto adesso da due corde della circonferenza γ passanti per O.

Sia dunque k la circonferenza fondamentale, di centro O e raggio r. Sia poi γ una generica circonferenza contenente al suo interno il punto O e siano A il suo centro ed a il suo raggio (figura 9). Sia inoltre $\overline{OA}$=d, ovviamente costante.

Condotta per O una generica retta che intersechi la circonferenza γ nei punti P e Q, siano poi P' e Q' rispettivamente i loro punti inversi rispetto alla trasformazione per raggi vettori reciproci. Per cui si ha: $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=\overline{OQ}\cdot\overline{OQ'}=r^2$.

Ragioniamo sul punto P', incominciando a tracciare per esso la parallela a QA e dicendo B il punto in cui essa interseca la retta OA. È evidente che i due triangoli OP'B e OQA sono simili. Si ha pertanto:

$$\frac{\overline{BP'}}{\overline{AQ}}=\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}.$$

Risulta, d'altro canto:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}\cdot\frac{\overline{OP}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OP}\cdot\overline{OP'}}{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}.$$

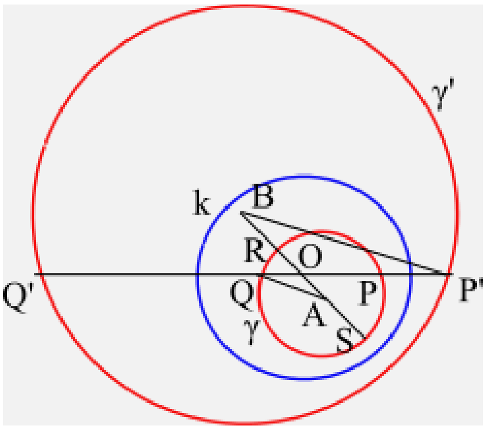

figura 9

Indicati con R ed S i punti in cui la retta OA interseca la circonferenza γ e tenendo presente che $\overline{OA}$=d e $\overline{AQ}=\overline{AR}=\overline{AS}$=a, in virtù del noto teorema delle corde, risulta: $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\overline{OR}\cdot\overline{OS}$. Siccome $\overline{OR}=\overline{AR}-\overline{OA}$=a–d e $\overline{OS}=\overline{AS}+\overline{OA}$=a+d, allora:

$$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=(a-d)(a+d)=a^2-d^2 .$$

Ragionando sulle due precedenti relazioni, si ricava:

$$\overline{BP'}=\overline{AQ}\cdot\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}=a\cdot\frac{r^2}{a^2-d^2}.$$

Cosicché, mentre P varia sulla circonferenza γ, il suo inverso P' varia in modo che la sua distanza da B si mantenga uguale alla quantità costante $a \cdot \frac{r^2}{a^2-d^2}$. Come dire che P' descrive la circonferenza γ', di centro B e raggio $a \cdot \frac{r^2}{a^2-d^2}$. Faccio notare che la circonferenza γ', come γ, contiene al suo interno il punto O.

Ad analogo risultato si perviene ragionando sul punto Q', nel senso che, mentre Q descrive γ, il suo inverso Q' descrive la medesima circonferenza γ'. Chiaramente adesso, ai fini della dimostrazione, bisogna prendere in considerazione la parallela a PA condotta per Q', ma il resto del ragionamento è uguale al precedente.

PROPRIETÀ 5. *L'angolo formato da due rette è uguale all'angolo formato dalle linee corrispondenti nell'inversione.*

DIMOSTRAZIONE. Siano date due rette r ed s. Bisogna distinguere diverse situazioni.

a) Se le due rette passano entrambe per il centro O dell'inversione, la proprietà è evidente dal momento che le due rette sono trasformate in se stesse.

b) Se una sola retta, mettiamo r, non passa per O, si sa che la sua trasformata è una circonferenza γ passante per O e avente in O tangente t parallela ad r, mentre la retta s è trasformata in se stessa. Siccome l'angolo formato da γ ed s è precisamente l'angolo formato da t ed s e siccome quest'angolo è uguale a quello formato dalle rette r ed s, di nuovo la proprietà è dimostrata.

c) Se infine entrambe le rette r ed s non passano per O, basta tenere presente che le due circonferenze in cui esse sono trasformate passano entrambe per O ed hanno in O tangenti parallele alle rette r ed s. Siccome l'angolo che le due circonferenze formano nel punto O è esattamente l'angolo delle due tangenti, che è uguale a quello delle rette r ed s, ancora una volta la proprietà è dimostrata.

7. Abbiamo visto che la circonferenza fondamentale k è luogo di punti uniti nell'inversione rispetto a k. Abbiamo visto pure che ogni retta passante per il centro O dell'inversione è retta unita, ma non è luogo di punti uniti. Esistono, tuttavia, altre figure geometriche che sono trasformate in se stesse dall'inversione rispetto a k e sono precisamente le circonferenze ortogonali alla circonferenza k.

Chiarito, in via preliminare, che due circonferenze si dicono *ortogonali* se sono secanti e le tangenti ad esse nei punti comuni sono perpendicolari, dimostriamo che vale dunque il seguente teorema.

TEOREMA. *Ogni circonferenza ortogonale alla circonferenza fondamentale* k *è trasformata in se stessa dall'inversione rispetto a* k.

DIMOSTRAZIONE. Sia k la circonferenza fondamentale, di centro O e raggio r. Sia poi γ una generica circonferenza ad essa ortogonale e sia A il suo centro (figura 10).

Indicato con T uno dei due punti comuni alle due circonferenze, le tangenti ad esse in quel punto sono perpendicolari. Questo implica due fatti importanti:

1) la tangente a k passa per il centro A di γ e la tangente a γ passa per il centro O di k;
2) la circonferenza γ è esterna al centro O dell'inversione.

Ora, il punto T e l'altro punto in cui si secano le due circonferenze sono punti uniti nell'inversione rispetto a k, quindi sono trasformati i se stessi. Prendiamo allora su γ un qualsiasi altro punto P, distinto da essi, e siano P' il suo inverso e Q l'altra intersezione della retta OP con la circonferenza γ. Ci proponiamo di dimostrare che P' coincide con Q.

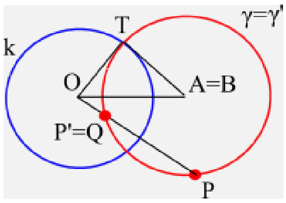

figura 10

In virtù del noto teorema della tangente e della secante, si ha: $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\overline{OT}^2$, ossia: $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=r^2$, mentre per definizione di inversione si ha: $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$. Risulta pertanto: $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\overline{OP}\cdot\overline{OP'}$ e, di conseguenza: Q=P'.

Possiamo concludere così che ogni punto P della circonferenza γ viene trasformato in un punto P' della stessa circonferenza, per cui è dimostrato che questa circonferenza è trasformata in se stessa dall'inversione rispetto a k.

8. Un'ultima proprietà dell'inversione.

Nonostante il fatto che l'inversione per raggi vettori reciproci trasformi in molti casi una circonferenza in una circonferenza, ossia una figura in una figura simile, nessuno pensa che essa sia una similitudine. Eppure con la similitudine l'inversione ha a che fare in qualche modo. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA. *La composizione di due inversioni aventi lo stesso centro* O *e potenze* r^2 *ed* s^2*, è un'omotetia di centro* O *e caratteristica* r^2/s^2.

DIMOSTRAZIONE. Siano date due inversioni, T_1 e T_2, di centro O e potenze rispettivamente r^2 ed s^2. Scriviamo le loro equazioni in un riferimento di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

$$T_1:\ \left(X_1=\frac{r^2x}{x^2+y^2},\ \ Y_1=\frac{r^2y}{x^2+y^2}\right);\qquad T_2:\ \left(X_2=\frac{s^2x}{x^2+y^2},\ \ Y_2=\frac{s^2y}{x^2+y^2}\right).$$

Troviamo le equazioni della composizione $T_1\circ T_2$ delle due trasformazioni:

$$X_1 = \frac{r^2 \cdot \frac{s^2 x}{x^2 + y^2}}{\left(\frac{s^2 x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{s^2 y}{x^2 + y^2}\right)^2} = \frac{r^2}{s^2} x\,, \qquad Y_1 = \frac{r^2 \cdot \frac{s^2 y}{x^2 + y^2}}{\left(\frac{s^2 x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{s^2 y}{x^2 + y^2}\right)^2} = \frac{r^2}{s^2} y\,.$$

Si ottiene così un'omotetia di centro O e caratteristica r^2/s^2, come si voleva dimostrare.

Questo accade se le potenze delle due inversioni sono diverse. Se invece sono uguali, ovviamente la composizione delle due inversioni si traduce nell'identità ($X=x$, $Y=y$).

BIBLIOGRAFIA.

[1] RICHARD COURANT – HERBERT ROBBINS, *Che cos'è la matematica* ? Torino, Bollati Boringhieri, 2000.

[2] FRANCESCO SEVERI, *Complementi di geometria proiettiva*, Bologna, Zanichelli, 1906.

[3] WIKIPEDIA, libera enciclopedia on-line.