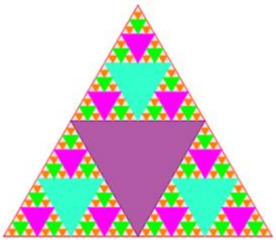
Dai frattali al triangolo di Tartaglia

di Marinella Vastano



Per spezzare la monotonia dei prodotti notevoli, prima di introdurre il triangolo di Tartaglia, inserisco da qualche anno una lezione sui frattali.

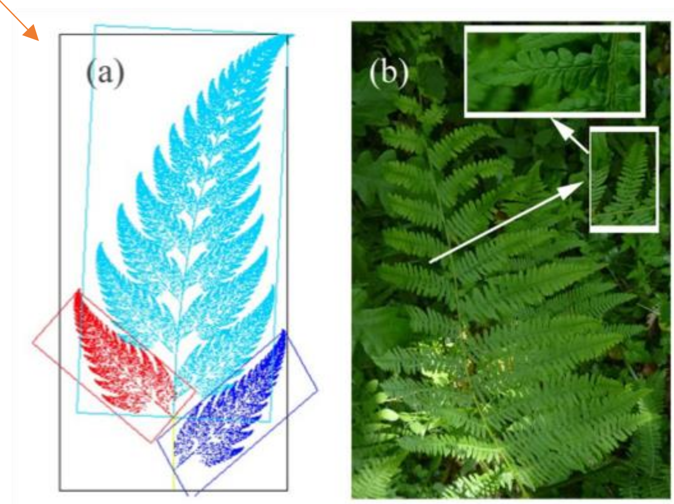
I frattali, probabilmente per la modernità dell'argomento ma anche per la loro dinamicità, sono una lezione che genera sempre stupore e fascino nei ragazzi. Sono proprio le loro curiosità che mi hanno portato a cercare spunti e collegamenti con gli argomenti del programma.

La lezione è strutturata in una classe del primo liceo scientifico, ma esistono molti spunti di riflessione per classi successive che citerò soltanto senza dimostrarle.

I ***frattali*** sono figure geometriche non euclidee caratterizzate da omotetia (trasformazione geometrica che lascia inalterate le proporzioni tra i lati e gli angoli della figura) interna, ossia si ripetono nella loro forma allo stesso modo su scale diverse.
Ingrandendo, dunque, una qualunque parte di una figura se ne ottiene una simile all'originale (**autosimilarità**) e quindi iterabili tramite software.

Esistono tantissimi esempi in natura di frattale, tra cui la felce reale ed il cavolfiore romano.

felce generata al computer per autosimilarità **felce reale in natura**



Dal punto di vista geometrico i frattali hanno poi una caratteristica veramente speciale, la loro "dimensione" può essere non solo intera (0,1,2,3) ma anche, frazionaria. Dimensione frattale D = log N / log (1/K)

Ma come nascono i frattali…

<u>La curva a fiocco di neve</u>

Il matematico svedese ***Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924)*** fu l'inconsapevole ideatore di uno dei primi frattali noti (il termine frattale fu coniato solo successivamente). Il matematico è ricordato per una curva particolare, detta per la sua forma ***curva a ficco di neve***, che scoprì nel 1904. La figura si costruisce partendo da un triangolo equilatero, si divide, poi, ogni lato in tre parti uguali e si elimina la sua parte centrale. Sopra la parte cancellata si costruiscono i due lati di un triangolo equilatero di lato 1/3, ottenendo così la stella di David con 12 lati.

Iterando la costruzione, la curva mantiene la stessa forma, diventando, però, sempre più fitta e frastagliata.

Dimensione D = log(4)/ log(3) ≈ 1.26

<u>*Caratteristiche principali*</u>*:*
La distanza lungo la curva, tra due punti qualsiasi, tende all'infinito, quindi la curva non possiede retta tangente in alcun punto (Koch aveva così trovato una curva a quei tempi detta "*patologica*": continua, ma senza tangenti. Una novità assoluta a quei tempi).
Inoltre la figura rappresenta una curva chiusa con un'area finita ma con perimetro infinito (sarebbe impossibile "recintarla" in quanto possiede infiniti angoli in un qualsiasi tratto)

<u>*Il Triangolo di Sierpinski*</u>

Il matematico Waclaw Franciszer Sierpinski (1882-1969) soprì, nel 1915, una configurazione geometrica triangolare, apparentemente impossibile, la cui area è zero.

Costruzione
Partiamo da un triangolo equilatero (fig.1) ed eliminiamo il triangolino centrale, avente per vertici i punti medi dei lati (fig 2). Ripetiamo il procedimento su ognuno dei tre triangoli rimanenti (quelli più esterni), iteriamo il procedimento più e più volte (fig 3).

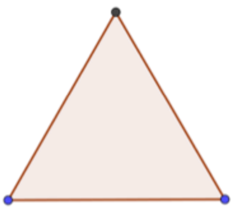


fig. 1

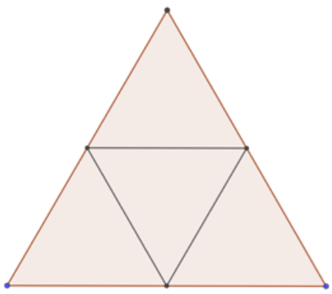


fig. 2

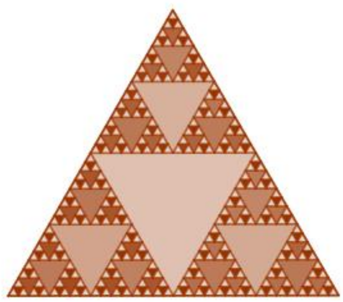


fig.3

Dimensione D=log 3 / log 2 = 1,585

Se iterassimo il procedimento infinite volte (al limite per n che tende all'infinito), quanto misurerebbe la sua area?
Ovviamente è impossibile iterare la costruzione infinite volte, ma con l'utilizzo di un software possiamo avvicinarci a tale costruzione. Inoltre per calcolare l'area finale dobbiamo sottrarre dall'area del triangolo iniziale (che possiamo suppore 1) l'area di tutti i triangolini successivamente costruiti (che seguiranno la progressione geometrica 1, ¾, $(¾)^2$ $(¾)^3$,…, di ragione ¾ , che tende a 0 per n che tende a ∝).
In altre parole, pian piano il triangolo di partenza si sarà svuotato, inoltre, è possibile dimostrare, sempre attraverso le serie geometriche, che il perimetro è infinito (nel calcolo del perimetro la ragione è 3/2).

Utilizzi del triangolo di Sierpinski…

Per dare un'idea più chiara alla classe di autosimilarità possiamo mostrare fig 1 e fig 3 ingrandendone un dettaglio.

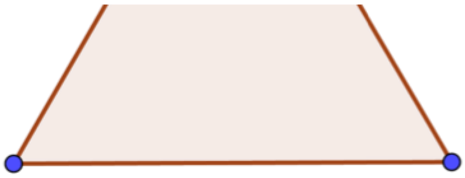


fig 4

Partendo dalla fig 4 possiamo chiedere ai ragazzi di stabilire il poligono di partenza. Ovviamente i ragazzi non potranno stabilirlo con certezza, in quanto la figura tagliata potrebbe rappresentare una parte di una qualsiasi poligonale.

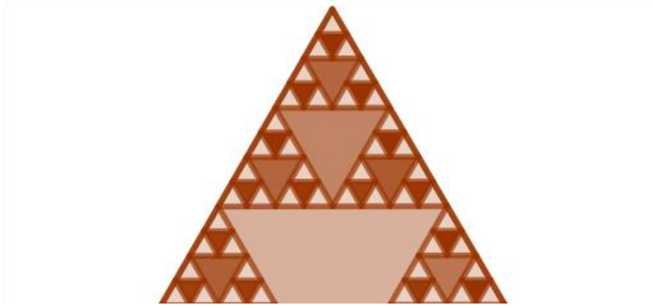
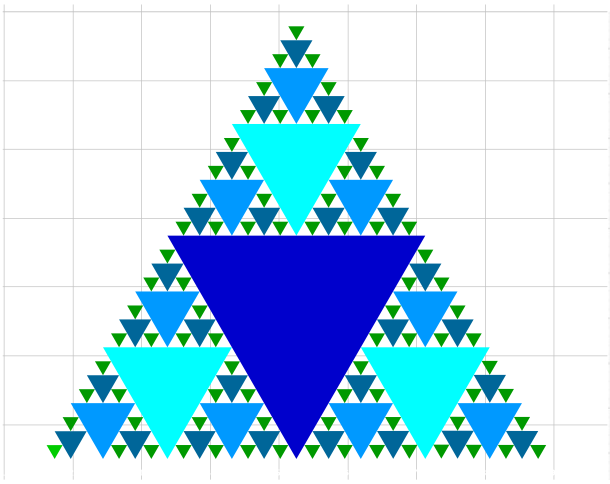
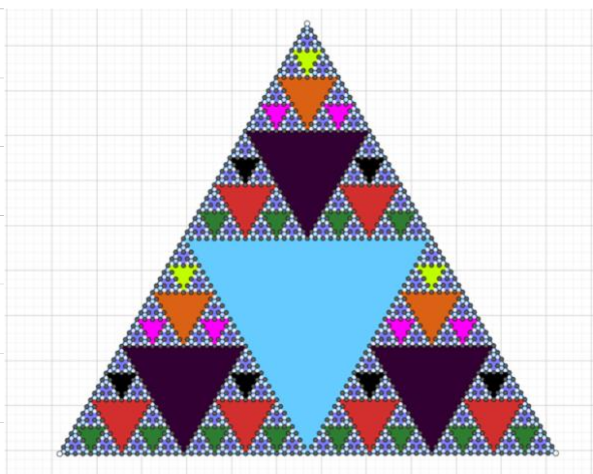


fig 5

Successivamente mostriamo la fig 5 e chiediamo se sono in grado di stabilire l'immagine di partenza.
In questo caso riconosceranno facilmente il triangolo di Sierpinski, proprio grazie alla proprietà di autosimilarità.

Inoltre essendo un procedimento facile da iterare è possibile richiedere alla classe di costruirlo mediante l'utilizzo del software GeoGebra… [***https://www.geogebra.org/m/gmeubgdp***](https://www.geogebra.org/m/gmeubgdp)

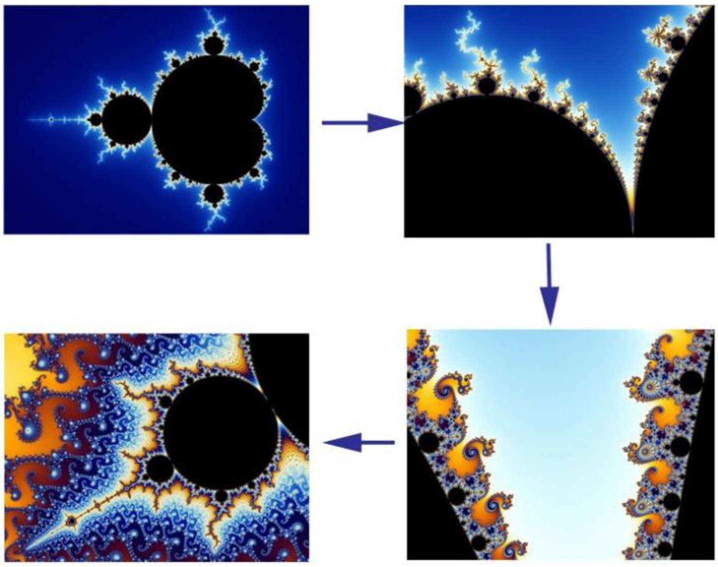




Benoît Mandelbrot

Il matematico che coniò il termine di ***frattale*** *fu* ***Benoît Mandelbrot*** *nel* ***1975****. Prima di lui i frattali, il cui nome deriva dal fatto che tali strutture non hanno dimensione intera bensì fratta, erano studiati solo a livello matematico* (come il fiocco di neve ed il triangolo di Sierpinski) *e considerati "strani" oggetti.*

Mandelbrot li introdusse spiegando che molte strutture della natura godono della caratteristica di autosimilarità e che si ripetono identiche a diversi livelli. Per lui occorre superare la visione *galileiana del libro dell'universo*, in quanto i triangoli, i cerchi e le altre figure della geometria classica non descrivono appieno alcune forme naturali ***"le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste non sono cerchi, la corteccia dell'albero non è levigata, né un fulmine viaggia in linea retta".***



Ingrandimenti successivi dell'"insieme di Mandelbrot" oggi noto non solo per le sue proprietà matematiche, ma anche per la sua bellezza, maggiormente visibili nel video che consiglio di mostrare alla classe:

https://www.youtube.com/watch?v=X1SpQGsS3e4&authuser=1

Il triangolo di Tartaglia

Nicolò Fontana (1500 ca. – 1557), matematico bresciano, è noto sia per i suoi studi sulle equazioni di terzo grado, ma soprattutto per il famoso triangolo che porta il suo "soprannome". Come è noto il soprannome "Tartaglia" gli fu dato dai coetanei in seguito ad una ferita subita da fanciullo alla bocca, durante la battaglia che portò alla caduta di Brescia nelle mani dei francesi (1512), che gli danneggiò le capacità di parlare.

Il matematico, affrontando lo studio dell'approssimazione delle radici n−esime di un numero, venne indotto a studiare i coefficienti binomiali e, allo scopo di mettere in luce la legge della loro formazione, li dispose in triangolo. Sebbene, presumibilmente, il triangolo fosse noto già nell' XI sec., ai tempi dei cinesi e degli arabi, a lui va sicuramente il merito di averlo divulgato.

Come si costruisce…

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Il triangolo si costruisce a partire dall'alto scrivendo un 1 e se ne aggiungono altri due nella riga sottostante, a destra e a sinistra del primo. Per formare le righe successive si aggiungono altri 1 alle estremità e si ricava ciascun numero interno sommando i due numeri immediatamente soprastanti.

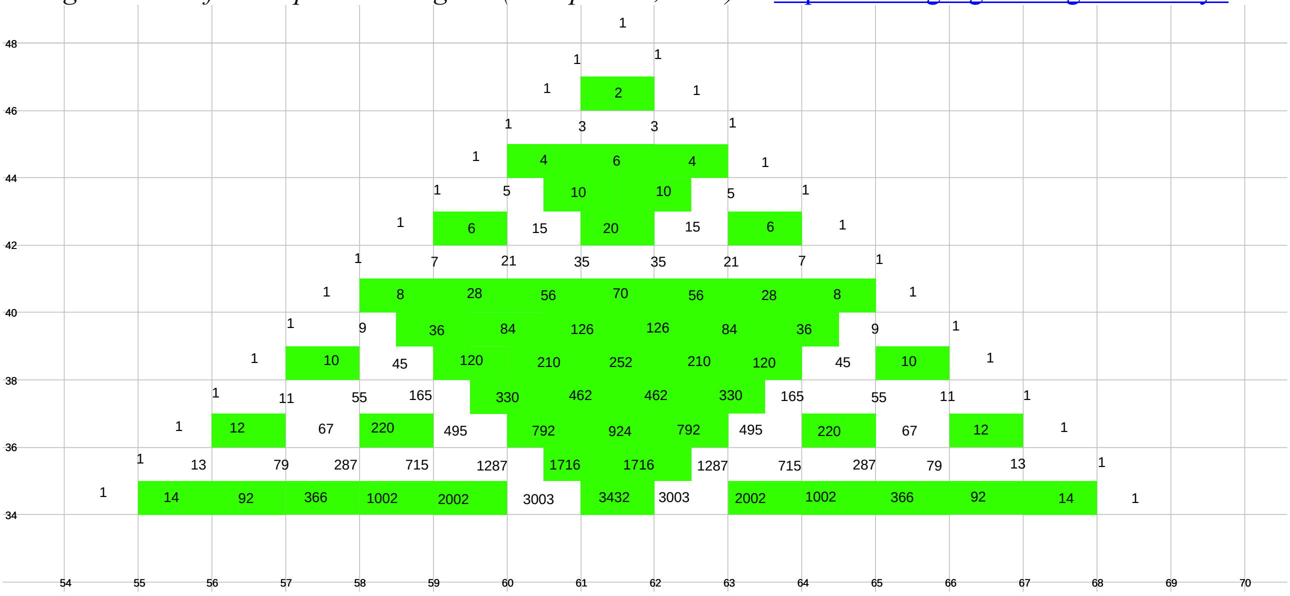
Lo schema è famoso per la sua simmetria e per le relazioni esistenti fra i suoi termini, permette, infatti, di costruire *le potenze del binomio* $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$

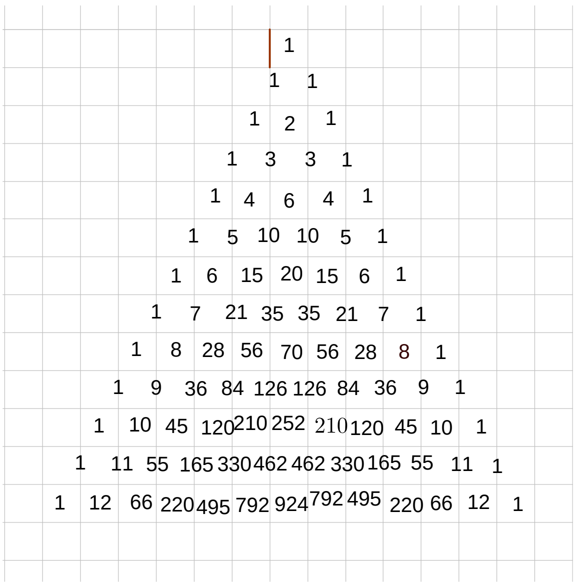
*Disegnato il triangolo, ogni **riga n-esima** rappresenta **i coefficienti del polinomio** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$ che ha come sviluppo un **polinomio**, di **n+1** addendi, **omogeneo di grado n, completo, ordinato** rispetto a potenze **decrescenti della lettera a** e **crescenti della lettera b**.*

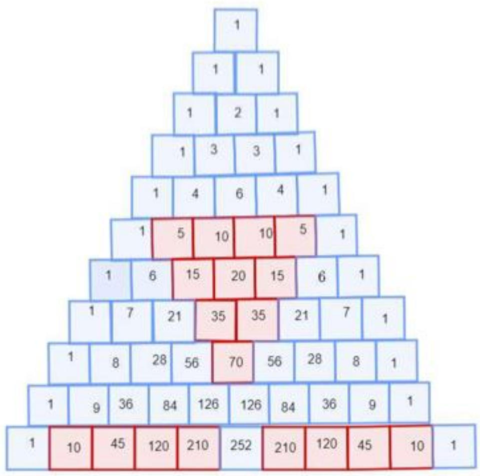
Analogamente può essere espresso mediante coefficienti binomiali $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Il triangolo di Tartaglia nasconde molte configurazioni interessanti; per esempio se evidenziamo ogni numero e tutti i suoi multipli con lo stesso colore otteniamo una figura che ricorda il triangolo di Sierpinski.

Di seguito la verifica da parte dei ragazzi (multipli di 2, 3 e 5) https://www.geogebra.org/m/t4uedvyx







Questo è solo uno dei possibili approfondimenti, ne esistono svariati, ma è ***"davanti agli occhi estasiati dei nostri alunni che una lezione prende pieghe inaspettate"*** così come detto in una piacevole conversazione social col prof. *Silvio Landrone*.

I disegni con GeoGebra, così come i link, sono stati eseguiti dagli alunni della classe ***1B*** *del* ***Liceo Scientifico "ISISS Amaldi Nevio" di S. Maria C. V.***

Bibliografia
Eli Maor Eugen Iost "L'arte della geometria", Codice Edizioni;
"I Frattali: La Geometria della Natura" di Alberto Renieri (https://www.fidaf.it/wp-content/uploads/2015/05/I-frattali-La-geometria-della-natura.pdf)
"I Frattali cosa sono?" (https://www.docenti.unina.it/webdocenti-be/allegati/materiale-didattico/518200)
"Il triangolo di Tartaglia" di E. Agostini (http://dm.unife.it/divulgazione/2015/doc/a_tartaglia1.pdf)