Proprietà del punto simmediano – Parte prima
Il teorema di Lemoine
di Antonino Giambò

1. In un articolo pubblicato qualche tempo fa su questa medesima rubrica (*Proprietà di figure geometriche*) ho avuto modo di scrivere del *punto simmediano* di un triangolo, cioè di quel punto, denominato anche *punto di Lemoine* (1), nel quale concorrono le tre simmediane del triangolo, ossia le simmetriche delle sue mediane rispetto alle bisettrici che escono dagli stessi vertici.

Questo punto gode di interessanti proprietà e non sono proprietà esattamente intuitive.

Di una di esse mi occuperò in questo articolo. Si tratta precisamente di una proprietà espressa dal seguente teorema, noto come "teorema di Lemoine".

TEOREMA DI LEMOINE. *Il punto simmediano di un triangolo coincide con il baricentro del triangolo pedale dello stesso punto simmediano rispetto al triangolo dato.*

Di questo teorema ha fornito di recente una dimostrazione per via sintetica il matematico vietnamita Tran Quang Hung, in un articolo pubblicato nel 2017 dalla rivista *Forum Geometricorum: A Journal on Classical Euclidean Geometry*, col titolo, tradotto in italiano, *Dimostrazione sintetica del teorema di Lemoine*.

Proporrò qui una dimostrazione mutuata proprio da quella di Hung. Non è una dimostrazione difficilissima sul piano concettuale, ma è molto articolata e richiede per questo attenzione e concentrazione.

Presenterò pure una dimostrazione condotta con gli strumenti della Geometria Analitica, limitata però al triangolo rettangolo, dal momento che la dimostrazione nel caso generale risulta indigesta per la laboriosità dei calcoli. Con questa scelta evito appunto complicazioni di calcolo, che tuttavia non possono essere eliminate del tutto, ma rimangono perlomeno tollerabili. Eseguirò comunque una verifica del teorema in due casi in cui i triangoli di riferimento hanno vertici assegnati, al fine di far intuire quale sia il procedimento nel caso generale, ma senza le complicazioni di calcolo del caso generale medesimo: nel primo di tali casi il triangolo di riferimento è acutangolo, nel secondo è ottusangolo, ma il procedimento di verifica è esattamente lo stesso.

2. DIMOSTRAZIONE del teorema di Lemoine per via sintetica.

Consideriamo il triangolo ABC e sia S il suo simmediano (figura 1). Costruiamo i piedi delle perpendicolari ai lati AB, BC, CA e siano nell'ordine H, L, K. Il triangolo HLK è chiaramente il triangolo pedale di S rispetto al triangolo ABC.

Ci proponiamo di dimostrare che il baricentro del triangolo HKL è proprio il punto S.

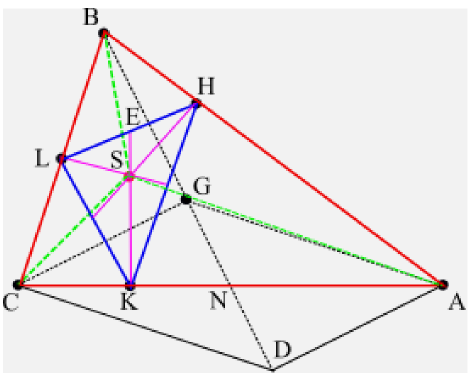

figura 1

Possiamo costatare subito che i quadrilateri SHBL, SLCK, SKAH, avendo ciascuno due angoli opposti retti e perciò supplementari, sono ciclici, vale a dire inscrivibili in un cerchio, per una nota proprietà sui quadrilateri.

[1] Émile Michel Hyacinthe Lemoine, matematico francese, 1840-1912. Il *punto di Lemoine* è oggetto di studio del matematico francese in un articolo pubblicato nel 1873 dal titolo *Sur quelques propriétés d'un point remarquable du triangle*. Questo articolo ha gettato le basi per quella che oggigiorno è denominata "moderna geometria del triangolo".

Indicato ora con G il baricentro del triangolo ABC e con N il punto medio del lato CA, sia D il punto simmetrico di G rispetto ad N. Il quadrilatero AGCD, le cui diagonali si bisecano, è chiaramente un parallelogramma.

Dimostriamo che i triangoli AGD e KHL sono simili.

A tal fine osserviamo che si ha: $A\widehat{D}G=C\widehat{G}D$ e siccome $C\widehat{G}D$ è angolo esterno del triangolo GBC, risulta uguale alla somma dei suoi angoli interni non adiacenti. Si ha perciò: $A\widehat{D}G=G\widehat{B}C+G\widehat{C}B$.

D'altro canto, per il modo stesso in cui è costruito il punto simmediano S, risulta: $S\widehat{B}C=G\widehat{B}A$, per cui: $S\widehat{B}C+S\widehat{B}G=G\widehat{B}A+S\widehat{B}G$, ossia: $G\widehat{B}C=S\widehat{B}A$. Analogamente, da $S\widehat{C}B=G\widehat{C}A$ segue $G\widehat{C}B=S\widehat{C}A$. Ne consegue la seguente uguaglianza: $G\widehat{B}C+G\widehat{C}B=S\widehat{B}A+S\widehat{C}A$. Pertanto, ricordando che $A\widehat{D}G=G\widehat{B}C+G\widehat{C}B$, risulta: $A\widehat{D}G=S\widehat{B}A+S\widehat{C}A$.

Considerata la circonferenza circoscritta al quadrilatero SHBL, possiamo costatare che gli angoli $S\widehat{B}A$ e $S\widehat{L}H$ sono angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco SH, per cui sono uguali. Parimenti sono uguali gli angoli $S\widehat{C}A$ e $S\widehat{L}K$, poiché sono angoli alla circonferenza (quella circoscritta al quadrilatero SLCK) che insistono sullo stesso arco SK. Si ha perciò: $S\widehat{B}A+ S\widehat{C}A=S\widehat{L}H + S\widehat{L}K = K\widehat{L}H$. In definitiva, ricordando adesso che $A\widehat{D}G=S\widehat{B}A+S\widehat{C}A$, risulta:

$$A\widehat{D}G = K\widehat{L}H\ .$$

Con un ragionamento analogo, che possiamo sintetizzare nella seguente catena di uguaglianze:

$$D\widehat{A}G = D\widehat{A}C + C\widehat{A}G = G\widehat{C}A + C\widehat{A}G = S\widehat{C}B + S\widehat{A}B = S\widehat{K}L + S\widehat{K}H = L\widehat{K}H,$$

si conclude che:

$$D\widehat{A}G = L\widehat{K}H\ .$$

Resta così dimostrato che i due triangoli AGD e KHL, avendo due angoli uguali, sono simili. I loro vertici si corrispondono secondo la seguente tabella:

$$\begin{pmatrix} A & G & D \\ K & H & L \end{pmatrix}.$$

Se ora indichiamo con E il punto in cui KS interseca HL, possiamo costatare che si ha: $N\widehat{A}D=L\widehat{K}E$. Infatti, risulta di seguito:

$$N\widehat{A}D = N\widehat{C}G = S\widehat{C}B = S\widehat{K}L = L\widehat{K}E.$$

Ne consegue che anche i triangoli AND e KEL sono simili e si corrispondono secondo la seguente tabella:

$$\begin{pmatrix} A & N & D \\ K & E & L \end{pmatrix}.$$

Come dire che la similitudine che trasforma AGD in KHL trasforma pure AND in KEL.

Ora, siccome N è il punto medio del segmento DG, allora E è il punto medio del segmento LH, corrispondente di DG sella similitudine considerata.

Il segmento KE è pertanto una mediana del triangolo KHL.

Con un ragionamento analogo i dimostra che la retta HS biseca il lato KL del triangolo KHL e la retta LS biseca il lato KH.

Tutto questo consente di concludere che il punto S è il baricentro del triangolo KHL. [c.v.d.]

3. DIMOSTRAZIONE del teorema di Lemoine per via analitica nel caso in cui il triangolo di riferimento è rettangolo.

Sia il triangolo ABC, rettangolo in C, con cateti di lunghezza $\overline{CA}=a$, $\overline{CB}=b$ e ipotenusa $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$, dove a, b sono numeri reali positivi.

Riferiamo il piano del triangolo ad un sistema di assi cartesiani ortogonali aventi come origine il punto C, come asse x la retta CA orientata da C verso A e come asse y la retta CB orientata da C verso B (figura 2).

Con questa scelta le coordinate dei vertici del triangolo sono le seguenti:

$$A(a,0),\ \ B(0,b),\ \ C(0,0),$$

e queste sono le equazioni dei suoi lati:

$$AB \equiv y = -\frac{b}{a}\,x + b,\quad BC \equiv x = 0,\quad CA \equiv y = 0.$$

Dobbiamo trovare anzitutto le coordinate del suo punto simmediano S e, di conseguenza, quelle dei punti H, K, L.

- Per la determinazione delle coordinate del simmediano occorre conoscere ovviamente le equazioni delle simmediane del triangolo (in realtà ne bastano due, per esempio proprio CE e AF). Lo faremo però con un procedimento che si appoggia ad una nota proprietà della simmediana [(2)], questa:

In ogni triangolo, la simmediana uscente da ciascun vertice divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali ai quadrati dei lati consecutivi.

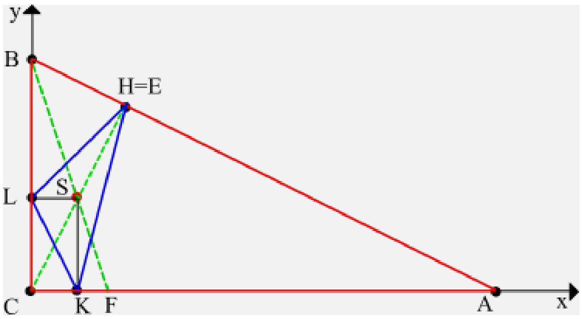

figura 2

- Andiamo allora a determinare queste equazioni.

Occupiamoci della simmediana CE.

Per la proprietà succitata risulta:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}\ ,\quad \text{ossia:}\quad \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{a^2}{b^2}\ ,\quad \text{da cui segue:}\quad \frac{\overline{AE}}{\overline{AE}+\overline{EB}}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\quad \text{e quindi:}\quad \overline{AE}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\,\overline{AB};$$

Da questa uguaglianza segue la seguente relazione vettoriale:

$$\overrightarrow{AE}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\,\overrightarrow{AB}$$

e da qui, passando alle coordinate:

$$x_E-x_A=\frac{a^2}{a^2+b^2}\,(x_B-x_A)\,,\quad y_E-y_A=\frac{a^2}{a^2+b^2}\,(y_B-y_A)\,,$$

da cui, a conti fatti, si ottengono le coordinate del punto E in cui la simmediana CE interseca il lato AB del triangolo:

$$E\left(\frac{a\,b^2}{a^2+b^2},\frac{a^2 b}{a^2+b^2}\right).$$

Possiamo adesso ottenere l'equazione della simmediana CE. Essa è la seguente:

$$CE\equiv\frac{y-y_C}{y_E-y_C}=\frac{x-x_C}{x_E-x_C}\quad \text{ossia, a calcoli eseguiti:}\ \ CE\equiv\ y=\frac{a}{b}x\,.$$

NOTA BENE. Si costata che la simmediana CE è perpendicolare alla retta AB. Vale a dire che la simmediana del triangolo rettangolo ABC, uscente dal vertice dell'angolo retto, coincide con l'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa. Vedremo fra breve che il punto simmediano è il punto medio di quest'altezza.

Questo non è un caso, ma accade sempre quando il triangolo di riferimento è rettangolo.

Passiamo alla simmediana BF.

Per la proprietà succitata risulta:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{CB}^2}{\overline{AB}^2}\ ,\text{ossia:}\quad \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\frac{a^2}{a^2+b^2}\ ,\quad \text{da cui segue:}\quad \frac{\overline{CF}}{\overline{CF}+\overline{FA}}=\frac{a^2}{a^2+2\,b^2}\quad \text{e quindi:}\quad \overline{CF}=\frac{a^2}{a^2+2\,b^2}\,\overline{CA};$$

Da questa uguaglianza segue la seguente relazione vettoriale:

---

[2] Per la dimostrazione della proprietà si può vedere il succitato articolo *Proprietà di figure geometriche*.

$$\overrightarrow{CF} = \frac{a^2}{a^2 + 2\,b^2}\,\overrightarrow{CA}$$

e da qui, passando alle coordinate:

$$x_F - x_C = \frac{a^2}{a^2 + 2\,b^2}\,(x_A - x_C)\,,\ \ y_F - y_C = \frac{a^2}{a^2 + 2\,b^2}\,(y_A - y_C)\,,$$

da cui, a conti fatti, si ottengono le coordinate del punto E in cui la simmediana CE interseca il lato AB del triangolo:

$$F\left(\frac{a\,b^2}{a^2 + 2\,b^2}, \frac{b^2}{a^2 + 2\,b^2}\right).$$

Possiamo adesso ottenere l'equazione della simmediana CE. Essa è la seguente:

$$BF \equiv \frac{y - y_B}{y_F - y_B} = \frac{x - x_B}{x_F - x_B} \quad \text{ossia, a calcoli eseguiti:}\ \ BF \equiv y = -\frac{a^2 + 2\,b^2}{a\,b}\,x + b\ .$$

Avendo trovato le equazioni delle due simmediane CE e BF, basta intersecarle per trovare le coordinate del punto simmediano S. Ovvero, basta risolvere il seguente sistema nelle incognite x, y:

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{b}\,x \\ y = -\dfrac{a^2 + 2\,b^2}{a\,b}\,x + b \end{cases}$$

A conti fatti si trova:

$$S\left(\frac{a\,b^2}{2\,(a^2 + b^2)}, \frac{a^2\,b}{2\,(a^2 + b^2)}\right).$$

- A questo punto, possiamo procedere alla ricerca dei vertici del triangolo HKL, cioè del triangolo pedale del punto S rispetto al triangolo di riferimento ABC.

Per conseguire lo scopo prefissato, dobbiamo trovare le coordinate dei piedi delle perpendicolari condotte dal punto S ai lati del triangolo ABC. In realtà, le coordinate di due di questi punti, K ed L, sono immediate, dal momento che x_K=x_S e y_L=y_S. Si ha dunque:

$$K\left(\frac{a\,b^2}{2\,(a^2 + b^2)}\ ,0\right),\ \ L\left(0, \frac{a^2\,b}{2\,(a^2 + b^2)}\right).$$

Per quanto riguarda il punto H, sappiamo già che esso coincide con il piede E dell'altezza relativa all'ipotenusa BC del triangolo ABC, per cui basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{b}\,x \\ y = -\dfrac{b}{a}\,x + b \end{cases}$$

Si trova:

$$H\left(\frac{a\,b^2}{a^2 + b^2},\ \frac{a^2\,b}{a^2 + b^2}\right).$$

E questo fa anche capire che S è il punto medio dell'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa.

Possiamo ottenere finalmente le coordinate del baricentro Q del triangolo HKL:

$$x_Q = \frac{x_H + x_K + x_L}{3} = \frac{\dfrac{a\,b^2}{a^2 + b^2} + \dfrac{a\,b^2}{2\,(a^2 + b^2)} + 0}{3} = \frac{a\,b^2}{2\,(a^2 + b^2)}\,,$$

$$y_Q = \frac{y_H + y_K + y_L}{3} = \frac{\dfrac{a^2\,b}{a^2 + b^2} + 0 + \dfrac{a^2\,b}{2\,(a^2 + b^2)}}{3} = \frac{a^2 b}{2\,(a^2 + b^2)}\,.$$

- Concludiamo senz'altro che Q=S, cioè, come si doveva dimostrare, il punto simmediano S del triangolo ABC è anche il baricentro Q del triangolo pedale di S rispetto ad ABC.

4. Ci occupiamo adesso della verifica del teorema nel caso in cui il triangolo assegnato, sempre riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), abbia vertici di coordinate note e sia acutangolo.

Sia allora il triangolo ABC di vertici (figura 3):

$$A(3,0)\,,\quad B(0,6),\quad C(-2,0).$$

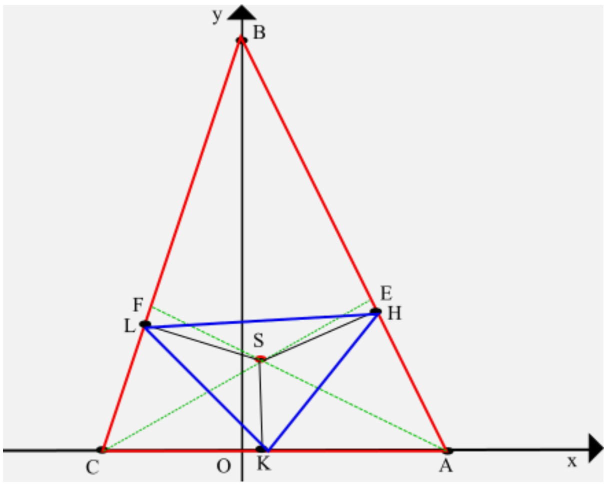

figura 3

Con questa scelta le equazioni dei suoi lati sono le seguenti:

$$AB \equiv y=-2\,x+6, \quad BC \equiv y=3\,x+6, \quad CA \equiv y=0;$$

mentre queste sono le misure dei lati: $\overline{AB}=3\,\sqrt{5}$, $\overline{BC}=2\,\sqrt{10}$, $\overline{CA}=5$.

Dobbiamo trovare anzitutto le coordinate del suo punto simmediano S e, di conseguenza, quelle dei punti H, K, L.

Per la determinazione delle coordinate del simmediano occorre conoscere ovviamente le equazioni delle simmediane del triangolo (in realtà ne bastano due, per esempio proprio CE e AF).

- Andiamo allora a determinare queste equazioni.

Occupiamoci della simmediana CE.

Per la proprietà succitata risulta:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}\,, \quad \text{ossia:} \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{25}{40}\,, \quad \text{da cui segue:} \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{AE}+\overline{EB}}=\frac{25}{25+40} \quad \text{e quindi:} \quad \overline{AE}=\frac{5}{13}\,\overline{AB};$$

Da questa uguaglianza segue la seguente relazione vettoriale:

$$\overrightarrow{AE}=\frac{5}{13}\,\overrightarrow{AB}$$

e da qui, passando alle coordinate:

$$x_E-x_A=\frac{5}{13}\,(x_B-x_A)\,,\quad y_E-y_A=\frac{5}{13}\,(y_B-y_A)\,,$$

da cui, a conti fatti, si ottengono le coordinate del punto E in cui la simmediana CE interseca il lato AB del triangolo: $E\left(\frac{24}{13},\frac{30}{13}\right)$.

Possiamo adesso ottenere l'equazione della simmediana CE. Essa è la seguente:

$$CE \equiv \frac{y-y_C}{y_E-y_C}=\frac{x-x_C}{x_E-x_C} \quad \text{ossia, a calcoli eseguiti:} \;\; CE \equiv \;\; y=\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}.$$

Passiamo alla determinazione dell'equazione della simmediana AF.

Per la stessa proprietà succitata risulta:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}\,, \quad \text{ossia:} \quad \frac{\overline{CF}}{\overline{FB}}=\frac{25}{45}\,, \quad \text{da cui segue:} \quad \frac{\overline{CF}}{\overline{CF}+\overline{FB}}=\frac{25}{25+45} \quad \text{e quindi:} \quad \overline{CF}=\frac{5}{14}\,\overline{CB};$$

Da questa uguaglianza segue la seguente relazione vettoriale:

$$\overrightarrow{CF}=\frac{5}{14}\,\overrightarrow{CB}$$

e da qui, passando alle coordinate:

$$x_F - x_C = \frac{5}{14}\,(x_B - x_C)\,,\;\; y_F - y_C = \frac{5}{14}\,(y_B - y_A)\,,$$

da cui, a conti fatti, si ottengono le coordinate del punto F in cui la simmediana AF interseca il lato BC del triangolo: $F\left(-\frac{9}{7},\frac{15}{7}\right)$.

Possiamo adesso ottenere l'equazione della simmediana AF. Essa è la seguente:

$$AF \equiv \frac{y-y_A}{y_F-y_A} = \frac{x-x_A}{x_F-x_A} \quad \text{ossia, a calcoli eseguiti:}\;\; CE \equiv\; y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\,.$$

Avendo trovato le equazioni delle due simmediane CE e BF, basta intersecarle per trovare le coordinate del punto simmediano S. Ovvero, basta risolvere il seguente sistema nelle incognite x, y:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x + \frac{6}{5} \\ y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

A conti fatti si trova:

$$S\left(\frac{3}{11},\frac{15}{11}\right).$$

- Possiamo ora procedere alla ricerca dei vertici del triangolo HKL, ossia del triangolo pedale del punto S rispetto al triangolo ABC.

Dobbiamo trovare anzitutto le coordinate dei piedi delle perpendicolari condotte da S ai lati del triangolo ABC. In realtà, le coordinate del punto K sono immediate. Si ha precisamente:

$$K\left(\frac{3}{11}\,,0\right).$$

Per quanto riguarda i punti H ed L, ci servono ovviamente le equazioni delle perpendicolari, p_{AB} e p_{BC}, condotte da S rispettivamente ai lati AB e BC. Si trova:

$$p_{AB} \equiv y = \frac{1}{2}\,x + \frac{27}{22} \quad , \quad p_{BC} \equiv y = -\frac{1}{3}\,x + \frac{16}{11}\,.$$

Cosicché:

$$H{=}p_{AB}{\cap}AB: \begin{cases} y=\frac{1}{2}\,x+\frac{27}{22} \\ y=-2\,x+6 \end{cases} \text{ da cui } H\left(\frac{21}{11},\frac{24}{11}\right)\;; \quad L{=}p_{BC}{\cap}BC: \begin{cases} y=-\frac{1}{3}\,x+\frac{16}{11} \\ y=3\,x+6 \end{cases} \text{ da cui } L\left(-\frac{15}{11},\frac{21}{11}\right).$$

Abbiamo adesso tutti gli elementi per trovare le coordinate del baricentro Q del triangolo HKL:

$$x_Q = \frac{x_H + x_K + x_L}{3} = \frac{\frac{21}{11}+\frac{3}{11}-\frac{15}{11}}{3} = \frac{3}{11}\,, \qquad y_Q = \frac{y_H + y_K + y_L}{3} = \frac{\frac{24}{11}+0+\frac{21}{11}}{3} = \frac{15}{11}.$$

- Concludiamo perciò anche adesso che Q=S, come si doveva verificare.

5. Passiamo alla verifica del teorema nel caso in cui il triangolo assegnato, sempre riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), abbia ancora vertici di coordinate note ma sia ottusangolo. Accenno rapidamente al procedimento, che è esattamente lo stesso del caso precedente.

Sia allora il triangolo ABC di vertici (figura 4):

$$A(10,0)\,,\;\; B(0,6),\;\; C(2,0).$$

Con questa scelta le equazioni dei suoi lati sono le seguenti:

$$AB \equiv y = -\frac{3}{5}\,x + 6, \quad BC \equiv y = -3\,x + 6, \quad CA \equiv y = 0.$$

Ragionando come nelle altre situazioni, si trovano dapprima le equazioni delle simmediane CE e BF:

$$CE \equiv y = 2x - 4\,, \quad BF \equiv y = -\frac{11}{7}x + 6\,.$$

Si trova quindi il punto in cui esse si intersecano, cioè il simmediano S del triangolo ABC:

$$S\left(\frac{14}{5},\frac{8}{5}\right).$$

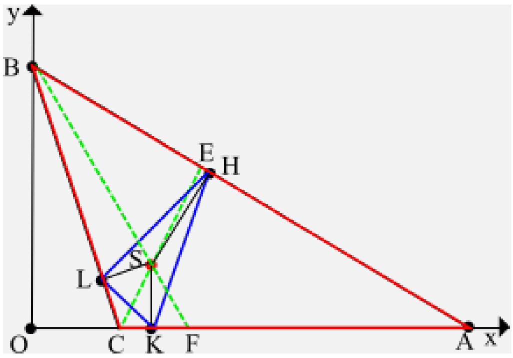

figura 4

Si trovano, a questo punto, le equazioni delle perpendicolari condotte dal punto S ai lati del triangolo ABC:

$$p_{AB} \equiv y = \frac{5}{3}x - \frac{46}{15}, \quad p_{AC} \equiv x = \frac{14}{5}, \quad p_{BC} \equiv y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3},$$

e si determinano le coordinate dei piedi di queste perpendicolari, vale a dire dei punti H, K, L in cui esse intersecano rispettivamente i lati AB, AC, BC del triangolo ABC:

$$H\left(4, \frac{18}{5}\right), \qquad K\left(\frac{14}{5}, 0\right), \quad L\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

Questi punti sono i vertici del triangolo pedale di S rispetto al triangolo ABC. Si verifica che il baricentro Q di questo triangolo è esattamente S, come deve essere. Di fatto:

$$x_Q = \frac{x_H + x_K + x_L}{3} = \frac{4 + \frac{14}{5} + \frac{8}{5}}{3} = \frac{14}{5} = x_S, \quad y_Q = \frac{y_H + y_K + y_L}{3} = \frac{\frac{18}{5} + 0 + \frac{6}{5}}{3} = \frac{8}{5} = y_S.$$