Proprietà del punto simmediano – Parte seconda
I cerchi di Lemoine
di Antonino Giambò

1. In questo articolo mi occuperò di due altre proprietà del simmediano di un triangolo e lo farò seguendo lo schema seguente: dimostrazione nel caso di un triangolo rettangolo, verifica nel caso di un particolare triangolo non rettangolo. Il tutto con il supporto della Geometria Analitica e, quando serve, della Trigonometria. Alcune implicazioni delle due proprietà saranno tuttavia trattate con gli strumenti della Geometria elementare.

2. La prima delle due proprietà è espressa dal seguente teorema.

TEOREMA. *Le rette condotte per il punto simmediano di un triangolo parallelamente ai lati del triangolo intersecano i lati del triangolo in punti situati tutti su una medesima circonferenza. Il centro della quale è il punto medio del segmento avente per estremi lo stesso simmediano e il circocentro del triangolo.*

Questo cerchio è denominato *primo cerchio di Lemoine* [(1)].

- DIMOSTRAZIONE (nel caso di un triangolo rettangolo). Sia dato il triangolo rettangolo ABC, i cui vertici abbiano le seguenti coordinate:

$$\mathrm{A}(a,0),\quad \mathrm{B}(0,b),\quad \mathrm{C}(0,0),$$

dove a, b sono numeri reali positivi.

Di questo triangolo sappiamo già parecchio, per averlo appreso nella trattazione della prima parte di questo argomento (cfr.: *Proprietà del punto simmediano – Parte prima*). In particolare, conosciamo le equazioni dei suoi lati:

$$AB \equiv y = -\frac{b}{a}\,x + b,\quad BC \equiv x = 0,\quad CA \equiv y = 0;$$

e conosciamo le coordinate del punto simmediano:

$$S\left(\frac{a\,b^2}{2\,(a^2+b^2)},\frac{a^2\,b}{2\,(a^2+b^2)}\right).$$

Possiamo facilmente calcolare le coordinate del suo circocentro e l'equazione della parallela al lato AB, condotta per S. Rispettivamente:

$$K\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right),\quad y = -\frac{b}{a}x + \frac{b}{2}.$$

Andiamo a trovare allora le coordinate dei punti P, P' in cui la parallela al lato BC, condotta per S, taglia i lati AB e AC rispettivamente, quelle dei punti Q, Q' in cui la parallela al lato AC, condotta per S, taglia i lati AB e BC rispettivamente, quelle infine dei punti R, R' in cui la parallela al lato AB, condotta per S, taglia rispettivamente i lati AC e BC (figura 1).

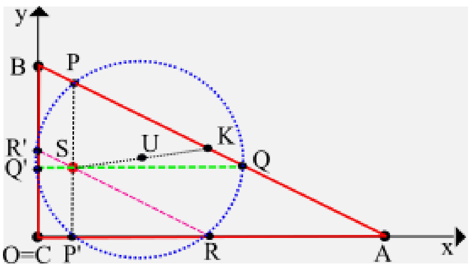

figura 1

Si trova facilmente:

$$P\left(\frac{a\,b^2}{2\,(a^2+b^2)},\frac{b\,(2\,a^2+b^2)}{2\,(a^2+b^2)}\right),\quad Q\left(\frac{a\,(a^2+2\,b^2)}{2\,(a^2+b^2)},\frac{a^2b}{2\,(a^2+b^2)}\right),\quad R\left(\frac{a}{2},0\right),$$
$$P'\left(\frac{a\,b^2}{2\,(a^2+b^2)},0\right),\quad Q'\left(0,\frac{a^2\,b}{2\,(a^2+b^2)}\right),\quad R'\left(0,\frac{b}{2}\right).$$

Troviamo adesso l'equazione della circonferenza passante per i punti P', R, R', e verifichiamo che passa anche per i punti P, Q, Q'. Verifichiamo inoltre che il suo centro U è il punto medio del segmento SK.

L'equazione della circonferenza è la seguente:

---

[1] Lemoine tratta dell'argomento in un articolo pubblicato nel 1874 dal titolo *Note sur le propriétés du centre des médianes antiparallèles dans un triangle*.

$$x^2+y^2-\frac{a\,(a^2+2\,b^2)}{2\,(a^2+b^2)}x-\frac{b\,(2\,a^2+b^2)}{2\,(a^2+b^2)}y+\frac{a^2b^2}{4(a^2+b^2)}=0.$$

Si controlla che il suo centro è il punto medio del segmento SK e che passa anche per i punti P, Q, Q'.

- Per la verifica del teorema in un caso particolare, ci rifacciamo ad un triangolo già preso in esame nell'articolo succitato e precisamente al triangolo ABC di vertici (figura 2):

$$A(10,0)\,,\quad B(0,6),\quad C(2,0).$$

Di questo triangolo conosciamo già le equazioni dei suoi lati, che sono le seguenti:

$$AB\equiv y=-\frac{3}{5}\,x+6,\quad BC\equiv y=-3\,x+6,\quad CA\equiv y=0,$$

e conosciamo pure le coordinate del punto simmediano S:

$$S\left(\frac{14}{5},\frac{8}{5}\right).$$

Troviamo le coordinate sia del circocentro K sia dei punti in cui le parallele ai lati del triangolo, condotte per S, incontrano i lati non paralleli:

$$K\left(6,\frac{14}{3}\right),\ P\left(\frac{5}{3},5\right),\ P'\left(\frac{10}{3},0\right),\ Q\left(\frac{22}{3},\frac{8}{5}\right),\ Q'\left(\frac{22}{15},\frac{8}{5}\right),\ R\left(\frac{82}{15},0\right),\ R'\left(\frac{17}{15},\frac{13}{5}\right).$$

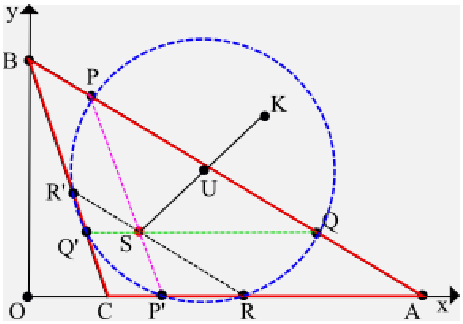

figura 2

A questo punto si può verificare che i punti P, P', Q, Q', R, R' sono situati su una medesima circonferenza, la cui equazione è la seguente:

$$x^2+y^2-\frac{44}{5}\,x-\frac{94}{15}y+\frac{164}{9}=0.$$

Si costata che il centro di questa circonferenza è il punto:

$$U\left(\frac{22}{5},\frac{47}{15}\right)$$

ed è esattamente il punto medio del segmento SK.

- I sei punti ciclici descritti individuano l'esagono PQRP'Q'R', denominato *esagono di Lemoine*. Tre lati di questo esagono (PQ, RP', Q'R') sono contenuti nei lati del triangolo di riferimento, gli altri tre (QR, P'Q', R'P) non lo sono (figura 3). Questi ultimi lati sono intersecati dalle simmediane uscenti dai vertici del triangolo più vicini ad essi nei punti rispettivamente A', C', B'.

Ebbene, *il triangolo* A'B'C' *è il trasformato del triangolo* ABC *secondo l'omotetia di centro* S *e caratteristica* 1/2.

Questo può essere dimostrato facilmente con considerazioni di Geometria elementare.

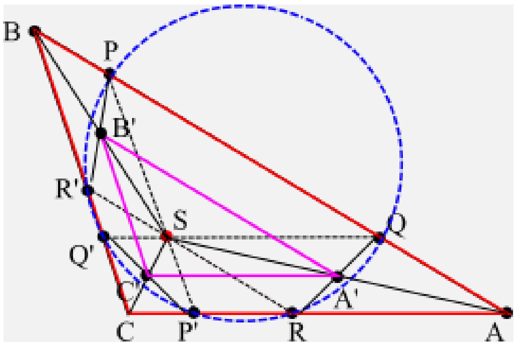

figura 3

Al riguardo, si può costatare che i quadrilateri SQAR, SP'CQ', SR'BP sono tutti parallelogrammi giacché i lati opposti di ciascuno di essi sono paralleli. Di conseguenza, com'è noto, le loro diagonali si bisecano. E, osservando la disposizione dei punti, si ha pertanto:

$$\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{SA},\ \ \overrightarrow{SC'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{SC},\ \ \overrightarrow{SB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB}.$$

Questo basta per concludere che il triangolo A'B'C' è effettivamente il trasformato del triangolo ABC in base all'omotetia di centro S e caratteristica $1/2$.

3. L'aver denominato *primo cerchio di Lemoine* il cerchio del quale ci siamo occupati poco sopra fa intendere che ci debba essere un "secondo cerchio di Lemoine". In effetti, è così. Ma prima di poterlo descrivere dobbiamo introdurre il concetto di "rette antiparallele".

Due rette r' ed r" si definiscono *antiparallele rispetto ad altre due rette* s' ed s" (r' antiparallela rispetto a s', r" antiparallela rispetto a s") se gli angoli orientati (r', s') e (r", s") sono uguali (figura 4).

Si dice pure che *la retta* r' *è antiparallela alla retta* s' *rispetto all'angolo* $\widehat{r''s''}$.

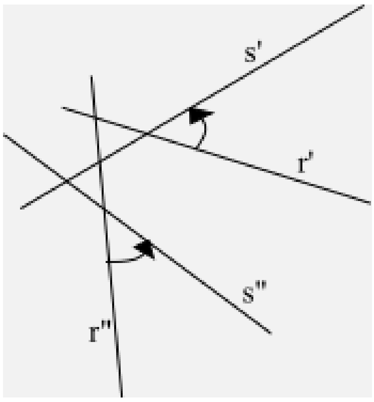

figura 4

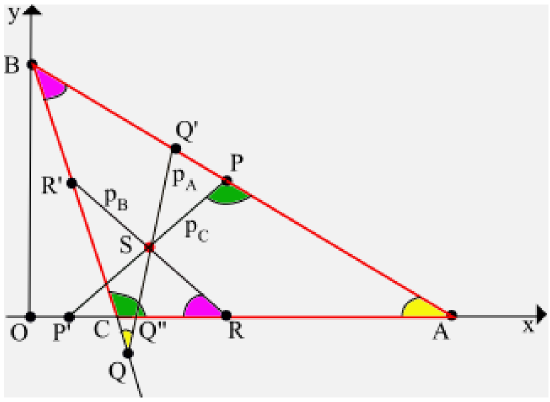

figura 5

Consideriamo ora il triangolo ABC (figura 5) e conduciamo tre rette, tutte passanti per il punto simmediano S del triangolo:

- la retta p_C=PP', con P appartenente alla retta c=AB e P' alla retta b=AC, in modo che l'angolo $P'\widehat{P}A$ che la retta p_C forma con il lato c sia uguale all'angolo $A\widehat{C}B$. Sono quindi uguali gli angoli orientati (p_C, c) e (b, a): la retta p_C=PP' è antiparallela alla retta c=AB rispetto all'angolo $A\widehat{C}B$;
- la retta p_A=QQ', con Q appartenente alla retta a=BC e Q' alla retta c=AB, in modo che l'angolo $Q'\widehat{Q}B$ che la retta p_A forma con il lato a sia uguale all'angolo $C\widehat{A}B$. Sono perciò uguali gli angoli orientati (p_A, a) e (c, b): la retta p_A=QQ' è antiparallela alla retta a=BC rispetto all'angolo $C\widehat{A}B$;
- la retta p_B=RR', con R appartenente alla retta CA e R' alla retta BC, in modo che l'angolo $R'\widehat{R}C$ che la retta p_B forma con il lato AC sia uguale all'angolo $A\widehat{B}C$. Sono dunque uguali gli angoli orientati (p_B, b) e (a, c): la retta p_B=RR' è antiparallela alla retta b=CA rispetto all'angolo $A\widehat{B}C$.

- Ebbene, vale il seguente teorema.

TEOREMA. *Dato un triangolo, le rette antiparallele ai suoi tre lati (rispetto ai relativi angoli interni) e passanti per il suo punto simmediano intersecano i lati del triangolo in sei punti situati su un medesimo cerchio, di cui il simmediano è il centro.*

Questo cerchio è denominato *secondo cerchio di Lemoine*.

Verifichiamo il teorema nel caso particolare in cui il triangolo sia il triangolo ABC già utilizzato poco sopra e con il medesimo riferimento cartesiano (figura 5). Naturalmente, volendo procedere con il supporto della Geometria Analitica, abbiamo bisogno di conoscere le equazioni, oltre che dei lati del triangolo, che già conosciamo, anche delle antiparallele p_A, p_B, p_C. Ora sappiamo che ognuna di queste rette passa per il punto

$$S\left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}\right).$$

Basta trovare di ciascuna di esse la pendenza e la sua equazione è cosa fatta.

- Incominciamo con l'antiparallela p_A= QQ'. La sua pendenza è $\tan A\hat{Q}"Q'$, avendo indicato con Q" il punto in cui p_A interseca CA Ora si ha: $A\hat{Q}"Q'=C\hat{Q}"Q=\pi-(Q"\hat{Q}C+Q\hat{C}Q)=\pi-(C\hat{A}B+O\hat{C}B)$, per cui:
$$\tan A\hat{Q}"Q' = -\tan(C\hat{A}B+O\hat{C}B) = -\frac{\tan C\hat{A}B + \tan O\hat{C}B}{1-\tan C\hat{A}B\ \tan O\hat{C}B} = -\frac{\frac{6}{10}+\frac{6}{2}}{1-\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{2}} = \frac{9}{2}.$$
Cosicché l'antiparallela p_A ha la seguente equazione:
$$y-\frac{8}{5}=\frac{9}{2}\left(x-\frac{14}{5}\right) \quad \text{ossia} \quad y=\frac{9}{2}x-11\,.$$
Ricordando ora che i punti Q e Q' appartengono rispettivamente alle rette BC e AB, bisogna risolvere i sistemi delle equazioni della retta $QQ'=p_A$, una volta con la retta BC e una volta con la retta AB, per trovarne le coordinate. Si ottiene precisamente:
$$Q\left(\frac{34}{15},-\frac{4}{5}\right),\quad Q'\left(\frac{10}{3},4\right).$$

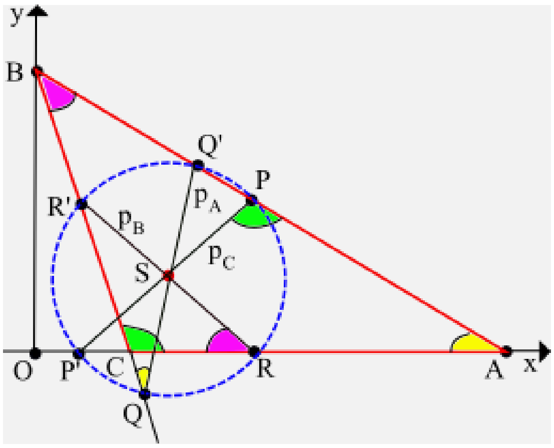

figura 6

- Passiamo all'antiparallela p_B= RR'. La sua pendenza è $\tan A\hat{R}R' = -\tan C\hat{R}R' = -\tan A\hat{B}C$.
Si ha d'altro canto: $A\hat{B}C=O\hat{B}A-O\hat{B}C$, per cui:
$$\tan A\hat{R}R' = -\tan(O\hat{B}A-O\hat{B}C) = -\frac{\tan O\hat{B}A-\tan O\hat{B}C}{1+\tan O\hat{B}A\tan O\hat{B}C} = -\frac{\frac{10}{6}-\frac{2}{6}}{1+\frac{10}{6}\cdot\frac{2}{6}} = -\frac{6}{7}.$$
Pertanto l'antiparallela p_B ha la seguente equazione:
$$y-\frac{8}{5}= -\frac{6}{7}\left(x-\frac{14}{5}\right) \quad \text{ossia} \quad y=-\frac{6}{7}x+4.$$
Intersecando questa retta con i lati CA e CB, sui quali sappiamo situati rispettivamente i punti R e R', si trovano le coordinate di questi punti. Di fatto:
$$R\left(\frac{14}{3},0\right),\quad R'\left(\frac{14}{15},\frac{16}{5}\right).$$

- Occupiamoci infine dell'antiparallela p_C= PP'. La sua pendenza è la tangente dell'angolo $A\hat{P}'P$. Ora si ha: $A\hat{P}'P=\pi-(P'\hat{P}A+P'\hat{A}P)=\pi-(A\hat{C}B+C\hat{A}B)$, per cui:
$$\tan A\hat{P}'P = -\tan(A\hat{C}B+C\hat{A}B) = -\frac{\tan A\hat{C}B+\tan C\hat{A}B}{1-\tan A\hat{C}B+\tan C\hat{A}B} = -\frac{-\frac{6}{2}+\frac{6}{10}}{1+\left(-\frac{6}{2}\right)\cdot\frac{6}{10}} = \frac{6}{7}.$$
L'antiparallela p_C ha di conseguenza la seguente equazione:
$$y-\frac{8}{5}=\frac{6}{7}\left(x-\frac{14}{5}\right) \quad \text{ossia} \quad y=\frac{6}{7}x-\frac{4}{5}.$$
Le sue intersezioni con i lati AB e AC, sui quali si trovano i punti P e P' nell'ordine, forniscono le coordinate di questi punti, vale a dire:

$$P\left(\frac{14}{3},\frac{16}{5}\right),\quad P'\left(\frac{14}{15},0\right).$$

A questo punto possiamo trovare l'equazione del cerchio avente centro in S e passante per uno dei sei punti trovati, per esempio R, e verificare che su questo cerchio sono situati gli altri 5 punti.

L'equazione del cerchio è la seguente:

$$\left(x-\frac{14}{5}\right)^2+\left(y-\frac{8}{5}\right)^2=\left(\frac{14}{3}-\frac{14}{5}\right)^2+\left(0-\frac{8}{5}\right)^2$$

vale a dire:

$$x^2+y^2-\frac{28}{5}x-\frac{16}{5}y+\frac{196}{45}=0\,.$$

- Una volta che è stato appurato che i punti P, P', Q, Q', R, R' sono situati sulla medesima circonferenza, è facile stabilire che i quadrilateri PQ'P'Q, PR'P'R e RQ'R'Q sono rettangoli (figura 7).

E quindi le rette PR', RQ', QP' sono parallele rispettivamente ai lati CA, BC, AB del triangolo ABC.

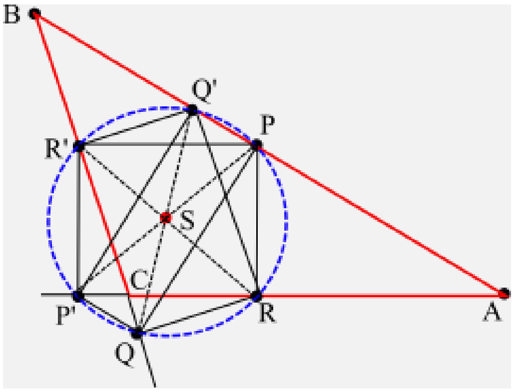

figura 7

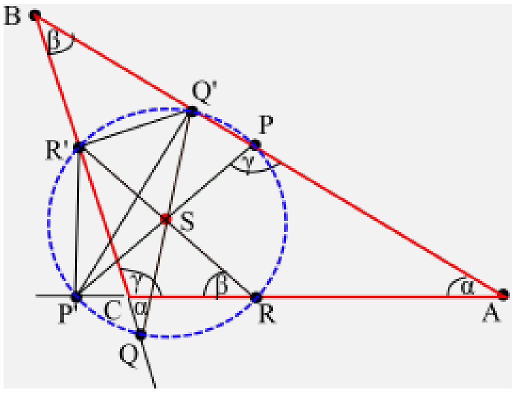

figura 8

- Un'interessante osservazione. Sempre con riferimento al triangolo ABC, che ora riportiamo indicando anche le ampiezze α, β, γ dei suoi angoli di vertici, nell'ordine, A, B, C (figura 8), fermiamo la nostra attenzione sui triangoli rettangoli P'PQ', Q'QR' e R'RP', aventi tutti e tre ipotenuse uguali al diametro 2r del secondo cerchio di Lemoine.

Questi triangoli hanno ciascuno un cateto – rispettivamente PQ', QR', RP' – coincidente con un segmento che il cerchio intercetta su un lato del triangolo, mentre l'angolo acuto adiacente a questo cateto è uguale o supplementare all'angolo del triangolo ABC opposto al lato medesimo. Nello specifico:

- l'angolo $P'\widehat{P}Q'$, adiacente al cateto PQ', è supplementare dell'angolo $A\widehat{C}B=\gamma$, opposto al lato AB su cui giace PQ'; per cui si ha: $PQ'=2\,r\cos(\pi-\gamma)$;
- l'angolo $Q'\widehat{Q}R'$, adiacente al cateto QR', è uguale all'angolo $B\widehat{A}C=\alpha$, opposto al lato BC su cui giace QR'; per cui si ha: $QR'=2\,r\cos\alpha$;
- l'angolo $R'\widehat{R}P'$, adiacente al cateto RP', è uguale all'angolo $C\widehat{B}A=\beta$, opposto al lato CA su cui giace RP'; per cui si ha: $RP'=2\,r\cos\beta$.

Da tutto ciò discende la seguente relazione:

$$\frac{PQ'}{\cos(\pi-\gamma)}=\frac{QR'}{\cos\alpha}=\frac{RP'}{\cos\beta}\,.$$

Ossia, detto a parole: *Le lunghezze dei segmenti che il secondo cerchio di Lemoine intercetta sui lati del triangolo di riferimento sono direttamente proporzionali ai coseni degli angoli del triangolo opposti ai lati intercettati o dei loro supplementari* (2).

Per questo motivo il secondo cerchio di Lemoine è denominato anche *cerchio del coseno*.

---

[2] In realtà, se il triangolo di riferimento è acutangolo, i segmenti in questione sono proporzionali ai coseni degli angoli opposti ai lati intercettati; se invece è ottusangolo (come nel nostro caso), il segmento opposto all'angolo ottuso, e solo esso, è proporzionale al coseno del supplementare di quest'angolo.

- È necessaria una precisazione qualora il triangolo di riferimento sia un triangolo rettangolo.

Bisogna ricordare infatti che in questo caso la simmediana uscente dal vertice dell'angolo retto coincide con l'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa.

Per questo motivo, posto di riferirsi al triangolo rettangolo ABC, di cui sia S il simmediano (figura 9), coincidono le antiparallele p_A e p_C alle rette BC e AB, e, di conseguenza, il punto P coincide con Q' e il punto P' coincide con Q. Ne consegue che non sono 6 i punti in cui le antiparallele ai lati del triangolo passanti per S intersecano questi lati, bensì 4. Ed è per questi 4 punti che passa il secondo cerchio di Lemoine.

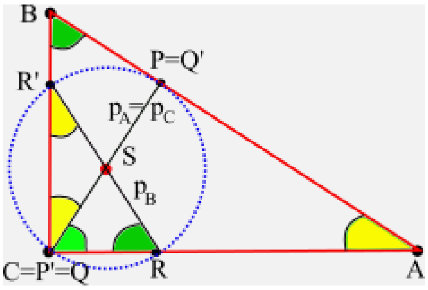

figura 9

Tutto questo, in realtà, può essere dimostrato e può essere fatto con considerazioni di geometria elementare. È precisamente quello che andiamo a fare.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il triangolo rettangolo ABC, di cui S è il simmediano (figura 8).

Sappiamo che S si trova sull'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa ed è esattamente il punto medio di quest'altezza, per cui SQ=SQ'.

Costruiamo allora le seguenti rette passanti per S:

- La retta p_C=PP' (P preso su AB e P' su AC) in modo che l'angolo $P'\hat{P}A$ che forma con il lato AB sia uguale all'angolo $A\hat{C}B$. Poiché quest'angolo è retto, anche l'altro angolo lo è, per cui P coincide con il piede dell'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa. Inoltre P'=C. L'antiparallela PP' alla retta AB rispetto all'angolo $A\hat{C}B$ è pertanto l'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa.
- La retta p_A=QQ' (Q preso su BC e Q' su AB) in modo che l'angolo $Q'\hat{Q}B$ che forma con il lato BC sia uguale all'angolo $C\hat{A}B$. Siccome, in virtù della similitudine dei triangoli ABC e CBP, risulta $C\hat{A}B=P\hat{C}B$, ne consegue che Q coincide con C. Inoltre Q'=P. Anche adesso l'antiparallela QQ' alla retta BC rispetto all'angolo $C\hat{A}B$ coincide con l'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa.
- La retta p_B=RR' (R preso su AC e R' su BC) in modo che l'angolo $R'\hat{R}C$ che forma con il lato AC sia uguale all'angolo $A\hat{B}C$. Si costata che il triangolo RR'C è un triangolo rettangolo di ipotenusa RR' e la retta RR' è antiparallela alla retta CA rispetto all'angolo $A\hat{B}C$.

Osserviamo adesso che i due triangoli BQ'Q e RCR' sono simili per essere entrambi rettangoli ed avere uguali gli angoli $Q\hat{B}Q'$ e $R'\hat{R}C$, per cui anche $B\hat{Q}Q'=R\hat{R}'C$. Si desume che SR'=SQ.

Inoltre $S\hat{Q}R=S\hat{R}Q$ poiché si tratta di angoli complementari degli angoli uguali $S\hat{Q}R'$ e $C\hat{A}P$. Dunque anche SR=SQ.

Insomma, S è equidistante dai punti Q, R, Q', R' e perciò questi punti sono situati sullo stesso cerchio di centro S. Questo è, per l'appunto, il secondo cerchio di Lemoine, passante per i 4 punti Q, Q', R, R'.

O, se si preferisce, è il cerchio passante per i 6 punti in cui le antiparallele ai lati del triangolo intersecano i lati dello stesso, purché si assuma che di questi 6 punti, 2 (P' e Q) sono riuniti nel vertice C dell'angolo retto e 2 (P e Q') nel piede dell'altezza relativa all'ipotenusa. Ipotenusa che per questo motivo è tangente al cerchio.

- Sussiste un altro interessante legame fra il punto simmediano di un triangolo e i sei punti situati sul secondo cerchio di Lemoine. Nel senso che, *congiungendo in modo opportuno, due a due, i sei punti, si viene a formare un triangolo simmetrico del triangolo di riferimento rispetto al punto simmediano*. Ma ci sono delle piccole differenze a seconda che il triangolo preso in esame sia rettangolo, ottusangolo o acutangolo.

Si possono condurre delle dimostrazioni generali con considerazioni di Geometria elementare, basate però su ciò che abbiamo appreso sopra, compreso il fatto che le rette PR', RQ', QP' sono parallele rispettivamente ai lati CA, BC, AB del triangolo ABC

- Incominciamo occupandoci del triangolo rettangolo, che presenta quell'anomalia che abbiamo testé evidenziato.
  Sia allora il triangolo rettangolo ABC, in cui AB è l'ipotenusa (figura 10). Sappiamo che il suo simmediano S è il punto medio dell'altezza relativa all'ipotenusa e sappiamo pure che il secondo cerchio di Lemoine è individuato dai punti P, P', Q, Q', R, R', dei quali però P e Q' sono riuniti nel piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, mentre P' e Q sono riuniti nel vertice dell'angolo retto. Sappiamo ancora che il quadrilatero PR'P'R è un rettangolo.
  Tracciamo le rette PR' e RQ' e la tangente al cerchio nel punto P'=Q.
  Queste tre rette individuano il triangolo A'B'C'. Ci proponiamo di dimostrare che esso è il trasformato di ABC nella simmetria centrale di centro S.
  Per questo occorre provare che i punti A', B', C' sono simmetrici nell'ordine dei punti A, B, C rispetto al punto S.

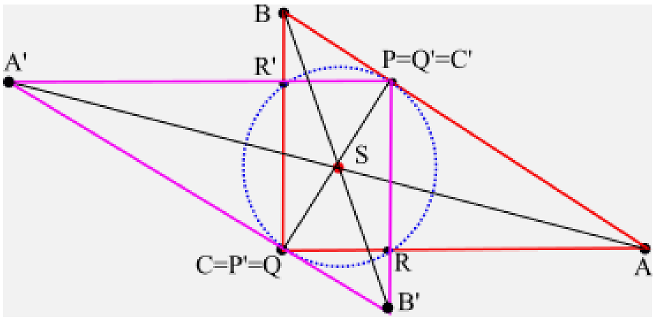

figura 10

  Ora, che C' sia simmetrico di C rispetto ad S è cosa nota. Occupiamoci dunque degli altri due punti.
  Consideriamo al riguardo i due triangoli SAP' e SA'P. Sono uguali per avere:
  $$\mathrm{SP'} = \mathrm{SP},\ \ \mathrm{A\hat{S}P'} = \mathrm{A'\hat{S}P},\ \ \mathrm{A\hat{P}'S} = \mathrm{A'\hat{P}}S.$$
  Di conseguenza: SA=SA'. A' è dunque simmetrico di A rispetto a S.
  Analogo discorso per dimostrare che B' è simmetrico di B rispetto a S: basta prendere in considerazione i due triangoli SBQ' e SB'Q.
  In conclusione, i due triangoli A'B'C' e ABC si corrispondono nella simmetria centrale di centro S.

- Sia adesso il triangolo ottusangolo ABC (figura 11). Sappiamo che il suo simmediano S è il centro del secondo cerchio di Lemoine. Cerchio sul quale sono situati i punti P, P', Q, Q', R, R'.

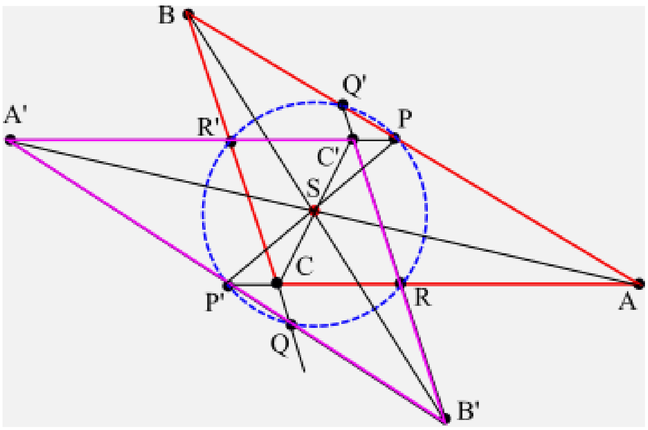

figura 11

Tracciamo le rette PR’, RQ’, QP’, ricordando che esse sono parallele rispettivamente alle rette dei lati CA, BC, AB del triangolo ABC. Queste rette individuano il triangolo A’B’C’. Ci proponiamo di dimostrare che esso è il trasformato di ABC nella simmetria centrale di centro S.
Per questo occorre provare che i punti A’, B’, C’ sono simmetrici nell’ordine dei punti A, B, C rispetto al punto S.
Consideriamo al riguardo i due triangoli SC’P e SCP’. Sono uguali per avere:

$$\mathrm{SP} = \mathrm{SP}', \quad \mathrm{C}'\hat{\mathrm{S}}\mathrm{P} = \mathrm{C}\hat{\mathrm{S}}\mathrm{P}', \quad \mathrm{C}'\hat{\mathrm{P}}\mathrm{S} = \mathrm{C}\hat{\mathrm{P}}'S.$$

Di conseguenza: SC=SC’. C’ è dunque simmetrico di C rispetto a S.
Analogamente si dimostra che A’ è simmetrico di A rispetto a S (basta prendere in considerazione i due triangoli SPA e SP’A’) e che B’ è simmetrico di B rispetto a S (basta prendere in considerazione i due triangoli SBP e SB’P’).
In conclusione, i due triangoli A’B’C’ e ABC si corrispondono nella simmetria centrale di centro S.

- Consideriamo infine un triangolo acutangolo. Però, a differenza degli altri due triangoli, le cui figure hanno un riscontro in figure precedenti (figura 8 per il triangolo rettangolo e figura 6 per il triangolo ottusangolo), in questo caso è necessario dapprima costruire una figura che evidenzi sia il suo punto simmediano sia gli altri punti interessati. Ebbene, questa figura (figura 12) fa riferimento al triangolo di vertici A(6,0), B(2,6), C(0,0). Procedendo quindi come nel caso del triangolo ottusangolo, si trovano le coordinate del suo punto simmediano S e dei 6 punti che individuano il secondo cerchio di Lemoine:

$$\mathrm{S}\left(\frac{39}{16},\frac{27}{16}\right); \quad \mathrm{P}\left(\frac{15}{4},\frac{27}{8}\right), \quad \mathrm{P}'\left(\frac{9}{8},0\right), \quad \mathrm{Q}\left(\frac{3}{8},\frac{9}{8}\right), \quad \mathrm{Q}'\left(\frac{9}{2},\frac{9}{4}\right), \quad \mathrm{R}\left(\frac{15}{4},0\right), \quad \mathrm{R}'\left(\frac{9}{8},\frac{27}{8}\right).$$

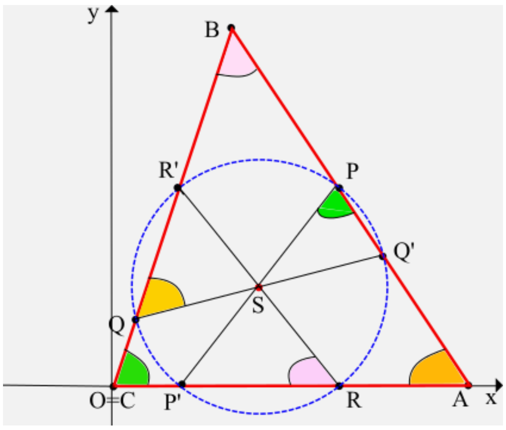

figura 12

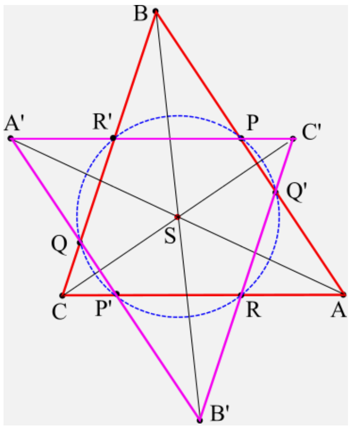

figura 13

A questo punto, considerato il triangolo acutangolo ABC (figura 13), avente come riscontro proprio la figura 12, possiamo procedere come nel caso del triangolo ottusangolo e, una volta costruito il triangolo A’B’C’, dimostrare che è simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto S.

- Riassumiamo, evidenziando le differenze emerse nel corso della costruzione dei triangoli A’B’C’, non prima di aver sottolineato che i vertici del triangolo A’B’C’ si trovano in ogni caso sulle simmediane del triangolo ABC.

Orbene, nel caso del triangolo ottusangolo il punto C’, simmetrico rispetto a S del vertice C dell’angolo ottuso, è interno al triangolo di riferimento ABC e le rette QP’ e PQ’ sono esterne a questo triangolo. Nel caso del triangolo rettangolo il punto C’, simmetrico rispetto ad S del vertice C dell’angolo retto, è situato sul contorno del triangolo e coincide esattamente con P=Q’, che è anche il piede dell’altezza del triangolo relativa all’ipotenusa, mentre le rette QP’ e PQ’ sono tangenti al secondo cerchio di Lemoine, la prima nel vertice dell’angolo retto, dal momento che Q=P’=C, e la seconda nel piede dell’altezza relativa all’ipotenusa dal momento che P=Q’=C’. Nel caso del triangolo acutangolo il punto C’ è esterno al triangolo di riferimento e le retta QP’ e PQ’ secano il triangolo ABC.

4. Mi piace concludere segnalando un'interessante curiosità. È facile comprendere che, per un triangolo di riferimento qualunque, sono distinti i due cerchi di Lemoine. Esiste, tuttavia, un triangolo per il quale i due cerchi coincidono: è il triangolo equilatero.

Si capisce infatti piuttosto facilmente che le antiparallele ai lati del triangolo passanti per il suo punto simmediano coincidono con le parallele ai lati medesimi passanti per lo stesso punto. A parte l'ordine, ovviamente. Così, per esempio, la retta PP' è antiparallela al lato AB rispetto all'angolo $A\hat{C}B$, ma è parallela al lato BC (figura 14).

Coincidono, pertanto, i punti in cui parallele e antiparallele tagliano i lati del triangolo e, di conseguenza, coincidono i due cerchi di Lemoine.

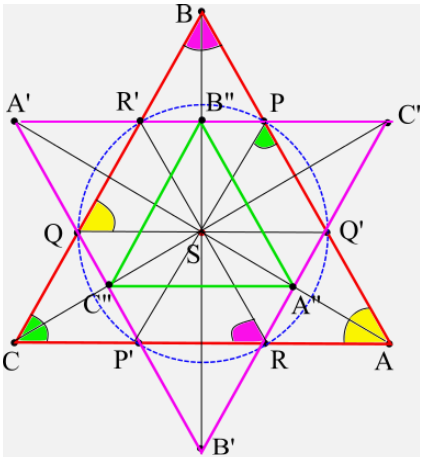

figura 14

La figura che rappresenta la situazione evidenzia pure, per completezza, il triangolo A'B'C' simmetrico di ABC rispetto ad S e il triangolo A"B"C" trasformato di ABC nell'omotetia di centro S e caratteristica 1/2, mostrando pure che i vertici di questi due triangoli sono situati sulle simmediane del triangolo di riferimento.

Pensierino finale.

Una verità matematica non è né semplice né complessa: è semplicemente.

Émile Lemoine.