Metodo analitico

Scegliendo lo stesso riferimento cartesiano dei casi precedenti e ripetendo le stesse considerazioni di carattere geometrico, indichiamo con $t = -\tan\alpha$ il coefficiente angolare della retta BC e con $m = \tan 2\alpha$ quello della retta AC, essendo

$m = -\frac{2t}{1-t^2} = \frac{2t}{t^2-1}$ (formula di duplicazione)

Dalle limitazioni imposte per l'angolo α si deduce che $-\sqrt{3} < t < 0$

Le coordinate di C sono soluzioni del sistema $\begin{cases} y &= \frac{2t}{t^2-1}\,x \\ y &= t(x-1) \end{cases}$ e forniscono le equazioni parametriche del luogo $\begin{cases} y &= \frac{2t}{t^2-3} \\ x &= \frac{t^2-1}{t^2-3} \end{cases}$

Si ritrovano i casi limite $\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^-} y(t) = 0^+ \\ \lim\limits_{t\to 0^-} x(t) = \frac{1}{3}^- \end{cases}$ $\begin{cases} \lim\limits_{t\to -\sqrt{3}^+} y(t) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to -\sqrt{3}^+} x(t) = -\infty \end{cases}$

Come già osservato, il punto C può appartenere, per simmetria, anche al semipiano delle y negative

Ricavando il valore di $t = \frac{y}{x-1}$ dalla seconda equazione e sostituendolo nella prima, si ottiene $y = \frac{2\frac{y}{x-1}}{\frac{y^2}{(x-1)^2}-1}\,x \;\rightarrow\; y\,[y^2 - (x-1)^2\,] = 2xy(x-1)$

Escludendo la soluzione $y = 0$ (triangolo sempre degenere) si ottiene ancora l'equazione $3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0$ con la limitazione $x \le \frac{1}{3}$ (accettando anche la posizione limite corrispondente al vertice sinistro dell'iperbole).