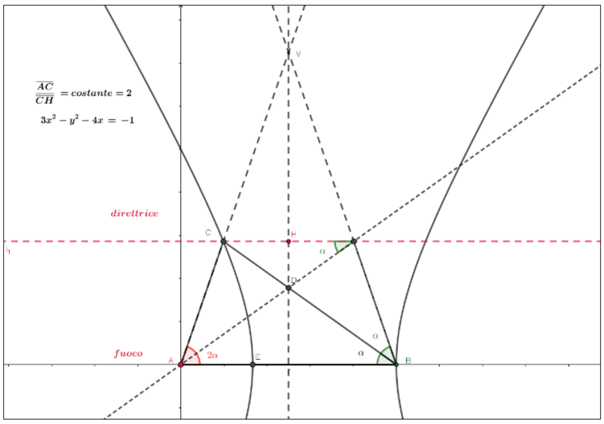
Proposta di soluzione col metodo sintetico.

Scegliamo un riferimento cartesiano Oxy in cui il punto A sia l'origine, la retta AB coincida con l'asse delle x e il punto B abbia coordinate (1;0)

La costruzione del triangolo ABC suggerisce che esso possa coincidere con uno di triangoli che si ottengono, in un triangolo isoscele di base AB, intercettando uno degli altri due lati con la bisettrice dell'angolo opposto. Considerando il trapezio isoscele CABK, si dimostra facilmente che $\overline{AC} = 2\,\overline{CH}$, dove H è il punto medio di CK.



Ricordando la definizione generale delle coniche come luoghi geometrici, si riconosce che il punto C, al variare di α, descrive un ramo d'iperbole di eccentricità uguale a 2, avente un fuoco nel punto A e la rispettiva direttrice coincidente con l'asse del segmento AB. Il vertice sinistro corrisponde al primo caso limite.

L'equazione si scrive, comunque, direttamente traducendo in linguaggio algebrico la relazione $\overline{AC} = 2\,\overline{CH}$, tenendo sempre conto delle limitazioni considerate in partenza.

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\left|\frac{1}{2} - x\right| \to x^2 + y^2 = 1 - 4x + 4x^2 \to 3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0$$

L'equazione, che può essere scritta nella forma $\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

rappresenta un'iperbole avente il centro nel punto di coordinate $\left(\frac{2}{3};0\right)$, semiassi di lunghezza $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}$, vertici nei punti di coordinate $\left(\frac{1}{3};0\right)$ e $(1;0)$ rispettivamente.

Gli assi di simmetria sono l'asse x e la retta $x = \frac{2}{3}$, le equazioni degli asintoti

$y = \pm\sqrt{3}\,x$

Il luogo richiesto è il ramo sinistro dell' iperbole $\to \begin{cases} 3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0 \\ x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$

La soluzione geometrica svela il legame del problema proposto con uno dei problemi classici dell'antichità.

L’iperbole determinata è infatti la curva con cui Pappo ha risolto il problema della trisezione dell’angolo (la trisettrice di Pappo). Nella figura a lato :

$$A\hat{P}C = \frac{1}{3} A\hat{P}B$$