Distanze sulla superficie terrestre
di Antonino Giambò

1. Se si vuole calcolare la distanza, in linea d'aria, tra due punti situati sulla superficie terrestre, di solito si prende una cartina geografica in scala, si misura la distanza tra i due punti sulla cartina e, moltiplicando per il fattore di scala, si trova la distanza cercata. Questo è noto a tutti.

In realtà, il valore trovato non è esattamente uguale alla distanza effettiva (si fa per dire, poiché si tratta comunque di valori approssimati), ma l'errore che si commette è del tutto trascurabile.

Un paio di esempi.

- Primo esempio. Su una cartina in scala 1:1.000.000, la distanza fra le città di Ancona e Macerata è di 35 mm, pari, nella realtà, a 35 km.
  Un calcolo più preciso indica però che la distanza effettiva è di 35,2 km.
  L'errore relativo ε_r che si commette nell'assumere il primo valore come distanza fra le due città è però del tutto trascurabile. Di fatto:
  $$\varepsilon_r = \frac{35{,}2 - 35}{35{,}2} \approx 0{,}5\ \%.$$
  Ribadisco, ad ogni buon conto, che stiamo parlando di distanze in linea d'aria. Nulla a che vedere con i percorsi stradali, tra i quali, quello più breve tra le due città considerate è di circa 50 km.
- Secondo esempio. Su una cartina in scala 1:75.000.000, la distanza fra le città di Napoli e New York è di 93 mm, pari, nella realtà, a 6.975 km.
  Un calcolo più accurato porta però al valore di 7.050 km.
  Anche adesso, tuttavia, l'errore che si commette è trascurabile. Si ha infatti:
  $$\varepsilon_r = \frac{7.050 - 6.975}{7.050} \approx 1{,}0\ \%.$$

Ora, mentre è risaputo come si calcola la distanza fra due punti segnati su una cartina geografica, forse non tutti sanno come si faccia ad ottenere valori più accurati di quella distanza.

Ebbene, lo scopo di questo articolo è di portare a conoscenza di coloro che lo ignorano come si possano trovare per l'appunto misure abbastanza accurate delle distanze dei punti situati sulla superficie terrestre. E, in particolare, come sono state ottenute le distanze fra le citta di Ancona e Macerata e fra le città di Napoli e New York, che abbiamo visto poco sopra.

2. La prima cosa da farsi è di stabilire sulla superficie terrestre un idoneo sistema di riferimento.

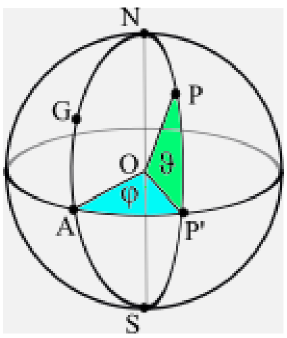

figura 1

Per questo indichiamo con O il centro della Terra e con NS il diametro passante per i suoi poli, il polo nord N ed il polo sud S: denominiamo *asse polare* questo diametro (figura 1). Consideriamo quindi il cerchio massimo contenuto nel piano perpendicolare ad NS: lo denominiamo *piano equatoriale*. Ed infine consideriamo uno dei semicerchi massimi ottenuti intersecando la sfera con un piano contenente l'asse polare NS, per esempio il semipiano passante per Greenwich (punto G), popoloso sobborgo di Londra: questo semicerchio è chiamato *semipiano polare*.

Fissato ora un qualsiasi punto P sulla superficie terrestre, sono individuate le ampiezze di due angoli:

- l'angolo $P\hat{O}P' = \vartheta$ che il raggio OP forma col piano equatoriale: si chiama ***latitudine***.
- l'angolo $A\hat{O}P' = \varphi$ che il semipiano di origine NS, passante per P, forma col semipiano polare: si chiama ***longitudine***;

Tali angoli sono considerati orientati. Precisamente:

- la latitudine si considera positiva se il punto P è situato dalla parte di N rispetto al piano equatoriale ed è negativa se è situato dalla parte di S; la latitudine varia da $-90°$ a $+90°$; la latitudine positiva si dice anche "latitudine Nord" ($+45°=45°$N), quella negativa "latitudine Sud" ($-60°=60°$S);
- la longitudine si considera positiva se il semipiano polare deve ruotare in senso antiorario di un angolo minore di un angolo piatto per sovrapporsi al semipiano di origine NS, passante per P, e si considera negativa se la rotazione avviene in senso orario; per questa ragione la longitudine varia da $-180°$ escluso a $+180°$ incluso; la longitudine positiva si dice anche "longitudine Est" ($+80°=80°$ E), quella negativa "longitudine Ovest" ($-50°=50°$ W).

Una breve nota storica.
Il criterio di indicare un punto della superficie terrestre con latitudine e longitudine fu seguito (e forse introdotto) da **Tolomeo** di Alessandria (II sec. d.C.) nell'opera ***Geographia***.
Nel secolo XIV il francese **Nicole Oresme** (circa 1323-1382), vescovo di Lisieux, filosofo, teologo e matematico, scrisse un'opera dal titolo ***Tractatus de latitudinibus formarum***, ma in essa egli utilizza i termini longitudine e latitudine in modo equivalente alle nostre ascissa e ordinata e quindi più come riferimento in un piano che come riferimento su una superficie sferica. In altri termini Oresme anticipa in qualche misura la geometria di Cartesio, piuttosto che sviluppare l'idea di Tolomeo.

Il sistema di riferimento latitudine-longitudine è detto sistema di ***coordinate geografiche***. È utile in geografia, in astronomia, nella navigazione sia marittima che aerea. È utile, in particolare, per individuare una posizione sulla superficie terrestre, pur con qualche correttivo dal momento che la Terra non è esattamente sferica.

La superficie terrestre viene poi considerata suddivisa in *meridiani* e *paralleli* (figura 2), nel modo seguente:

- Ogni circonferenza, secondo cui la superficie terrestre è intersecata dai piani contenenti l'asse terrestre, è divisa da quest'asse in due semicirconferenze: ciascuna di queste semicirconferenze si chiama ***meridiano***. Per convenzione la Terra (supposta sferica) si suppone divisa in 360 parti, individuati da 180 meridiani contati verso Est, a partire dal meridiano di Greenwich, e da 180 meridiani contati verso Ovest. ***I punti di uno stesso meridiano hanno la medesima longitudine***.
- I ***paralleli*** sono le circonferenze secondo cui la superficie terrestre è intersecata da piani paralleli all'Equatore: per convenzione se ne considerano 90 verso Nord e 90 verso Sud, oltre all'Equatore. ***I punti di uno stesso parallelo hanno la medesima latitudine***.

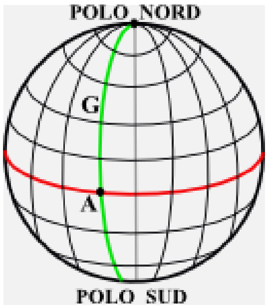

figura 2

Nella figura 2, la linea rossa rappresenta l'Equatore, la linea verde il meridiano di Greenwich. Il punto A, nel quale si incontrano queste due linee, è situato nel Golfo di Guinea, a circa 445 km a Sud della città di Accra, capitale del Ghana. Il punto diametralmente opposto ad A si trova invece nella Polinesia (Pacifico Centrale), circa a metà strada fra le Isole Gilbert (a Nord-Ovest) e le Isole della Fenice (a Sud-Est).

In base alle convenzioni precedenti, possiamo fare alcune constatazioni:

a) All'Equatore è assegnata la latitudine di 0° e al meridiano di Greenwich è assegnata la longitudine di 0°. Per cui, il suddetto punto A ha coordinate geografiche (0°,0°). Ci sono poi 4 paralleli particolari: i due *tropici* (del Cancro e del Capricorno) e i due *circoli polari* (artico e antartico): i *tropici* (o *circoli tropicali*) sono i paralleli di latitudine 23°27' Nord e Sud, i *circoli polari* sono i paralleli di latitudine 66°33' Nord e Sud.

b) L'Italia, isole comprese, è situata fra i 35° e i 48° di latitudine Nord e fra i 5° e i 19° di longitudine Est. Tra le città capoluogo di provincia: quella più ad Est è Lecce (40°21′ di latitudine Nord, 18°10′ di longitudine Est), quella più ad Ovest è Torino (45°4′ N, 7°42′ E), quella più a Nord è Bolzano (46°29′ N, 11°21′ E), quella più a Sud è Ragusa (36°55′ N, 14°43′ E).
c) Alla città di Roma competono le seguenti coordinate geografiche: 41°54′ di latitudine Nord, 12° 29′ di longitudine Est.
d) La città di Napoli è situata a 40°50′ di latitudine Nord e 14°15′ di longitudine Est.
e) La città di New York ha le seguenti coordinate geografiche: 40°43′ di latitudine Nord, 74°00′ di longitudine Ovest. Come dire che New York si trova praticamente sullo stesso parallelo di Napoli.

3. Una volta che sulla superficie terrestre sia stato stabilito il suddetto sistema di coordinate geografiche, è possibile calcolare la distanza di due punti qualsiasi situati sulla superficie terrestre. Per la verità, siccome la Terra non è propriamente sferica, non solo perché è schiacciata ai poli e rigonfia all'equatore, ma anche perché non è liscia per la presenza di monti, colline e avvallamenti, bisognerebbe fare altre considerazioni per avere delle eccellenti approssimazioni di tali distanze, ma se ci accontentiamo di risultati non troppo precisi, possiamo supporre che la Terra sia perfettamente sferica, con un raggio R=6.372 km, e così faremo nel seguito di questi brevi cenni.

La misura del raggio terrestre fu trovata per la prima volta da **Eratostene** di Cirene (275 circa - 194 a.C.) con un procedimento che richiama sostanzialmente, anche se non in maniera esplicita, il concetto di coordinate geografiche. In realtà, Eratostene calcolò la lunghezza della circonferenza terrestre, ma da qui al calcolo del raggio il passo è breve. Precisamente, considerato che la misura della circonferenza terrestre trovata da Eratostene sarebbe 39.500 km, ne seguirebbe un raggio di circa 6.287 km.

Questa misura fu successivamente perfezionata fino ad ottenere il valore odierno della lunghezza del *raggio medio* R della Terra, che è R ≈ 6.372 km.

Descrivo il **procedimento di Eratostene** a beneficio di quei due o tre che lo ignorassero.

Egli, sulla base di risultati di astronomi precedenti, si era convinto, non solo che la Terra fosse rotonda, ma che il Sole fosse ad una distanza così grande da poter ritenere paralleli quelli, fra i suoi raggi, che colpivano la Terra stessa. Sapeva inoltre che a mezzogiorno del solstizio d'estate (21 giugno) il Sole si specchiava nei pozzi di Syene (odierna Assuan) ed era perciò sulla verticale di Syene, mentre contemporaneamente ad Alessandria – posta, secondo Eratostene, sullo stesso meridiano di Syene [1] – esso formava con la verticale un angolo α pari ad 1/50 di angolo giro (figura 3).

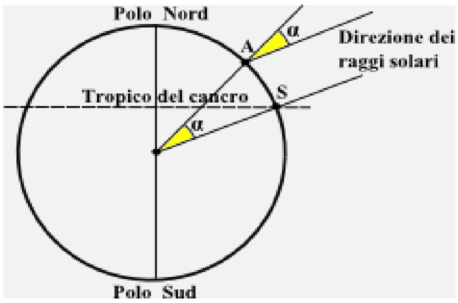

figura 3

Concludeva che la circonferenza della Terra misurasse 50 volte la "distanza" Syene-Alessandria. Egli ricavò tale distanza in base al tempo che le carovane impiegavano a percorrerla ed alla velocità che tenevano e trovò che era di circa 5.000 stadi. Pertanto la circonferenza della Terra misurava all'incirca 250.000 stadi.

[1] In realtà, Alessandria è situata a 29°55′ di longitudine Est, mentre Assuan si trova a 32°56′ di longitudine Est.

Secondo molti, 1 stadio equivale a circa 158 m [2], per cui la circonferenza della Terra sarebbe di circa 39.500 km. Misura straordinariamente vicina a quella reale che è circa 40.000 km.

Anche se questo risultato, secondo molti critici, è il frutto di una serie di errori che si compensano.

Eratostene descrisse il procedimento nell'opera ***Sulla misurazione della Terra*** che però è andata perduta. Una sintesi del suo procedimento, forse non del tutto fedele, ci è pervenuta tramite un astronomo e matematico greco di nome **Cleomede**, della cui vita non sappiamo nulla. La sua sola opera rimastaci, dal titolo *De motu circulari corporum coelestium* (più comunemente conosciuta come *Coelestia*), è però un documento prezioso giacché fornisce testimonianze, spesso uniche, su nomi e fatti che lo hanno preceduto. Una di queste riguarda per l'appunto il procedimento seguito da Eratostene per calcolare la lunghezza del meridiano terrestre.

4. Possiamo passare, adesso, alla misura della distanza di due punti sulla superficie terrestre.

Dobbiamo tener presenta, al riguardo, che, indicati con R il raggio della Terra e con O il suo centro (figura 4) e chiamati P e Q due qualsiasi punti della superficie sferica, la distanza dist (P,Q) è la lunghezza del minore degli archi di circonferenza massima, poiché tale arco realizza il minimo percorso tra tutti i possibili percorsi sulla superficie della Terra.

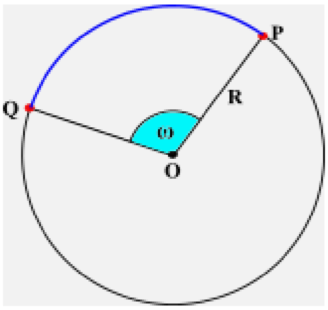

figura 4

Pertanto, posto di chiamare ω l'ampiezza in radianti dell'angolo PÔQ, risulta:

dist (P,Q) = lunghezza arco PQ = R ω.

Il problema consiste, dunque, nel riuscire a calcolare ω. Lo faremo attraverso alcuni esempi, nei quali abbiamo utilizzato per i calcoli eseguiti, uno strumento di calcolo automatico. E vedremo che ci sono delle differenze sostanziali nei procedimenti a seconda della posizione dei due punti, tutti comunque riconducibili ad una medesima formula.

ESERCIZIO 1. Le città di Ancona e Macerata sono situate grosso modo sullo stesso meridiano (la longitudine di Ancona è 13°31' E, quella di Macerata è di 13°27' E), però Ancona ha una latitudine di 43°37' N, mentre Macerata ha una latitudine di 43°18' N. Quant'è la loro distanza?

RISOLUZIONE. In questo caso la risoluzione è semplice, dal momento che, ogni volta che i due punti sono situati sullo stesso meridiano, ω è uguale al valore assoluto della differenza fra le latitudini dei due punti P e Q (figura 5).

Dunque, siccome nel nostro caso:

$\omega = 43°37' - 43°18' = 19' \approx 0{,}0055$ rad,

allora si ha:

dist (AN, MC) $= 6.372 \times 0{,}0055 \approx 35{,}2$ (km).

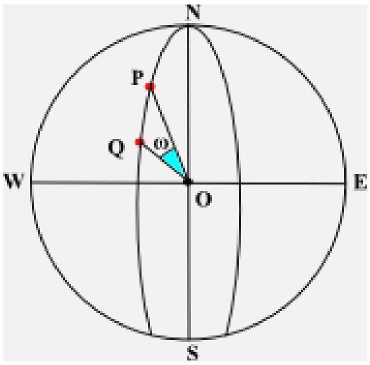

figura 5

ESERCIZIO 2. Le città di Napoli e New York sono situate approssimativamente sullo stesso parallelo (circa 41° N). Quant'è lungo il percorso che si compie se si va da Napoli a New York muovendosi su tale parallelo? Qual è la distanza delle due città?

RISOLUZIONE. Con riferimento alla figura 6, supponiamo che il punto P indichi la città di Napoli e il punto Q quella di New York. Assumiamo che sia circa 40°46' N (cioè la media aritmetica fra le latitudini di Napoli e New York) la latitudine del parallelo passante per i due punti. Questo significa che l'angolo EÔP ha ampiezza

[2] In realtà, non si conosce qual è esattamente la misura di uno "stadio". Tanto per dire, oltre a quella di circa 158 m, altri valori erano 177 m circa e 184 m circa.

α=40°46′. D'altra parte, l'angolo P$\hat{H}$Q ha ampiezza β uguale al valore assoluto della differenza fra le longitudini di P e di Q. Ora, P, cioè Napoli, ha una longitudine di +14°15′, mentre Q, cioè New York, ha una longitudine di −74°0′; per cui:

$$\beta = 14°15' + 74°00' = 88°15' \approx 1{,}54025 \text{ rad}.$$

Di conseguenza, la lunghezza L dell'arco PQ di parallelo è $L = \overline{HP} \cdot \beta$, essendo H il punto in cui il piano del parallelo passante per P e Q, interseca l'asse polare NS; come dire che H è il centro del parallelo. Bisogna calcolare quindi la misura di HP. Ora, nel triangolo rettangolo OHP, in cui l'angolo in P ha ampiezza α uguale alla latitudine ϑ e l'ipotenusa OP è il raggio R della Terra, si ha:

$$\overline{HP} = \overline{OP} \cos\alpha = R \cos 40°46' = 6.372 \times 0{,}75738 \text{ (km)}.$$

Dunque, il percorso da Napoli a New York, lungo il parallelo, è lungo:

$$L = 6.372 \times 0{,}75738 \times 1{,}54025 \approx 7.433 \text{ (km)}.$$

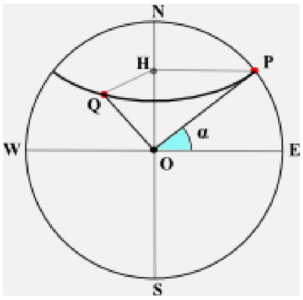

figura 6

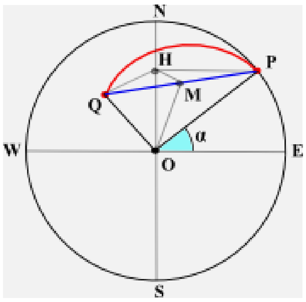

figura 7

La distanza fra Napoli e New York è invece uguale alla lunghezza del minore degli archi di circonferenza massima passante per P e Q, ossia uguale alla lunghezza R del raggio della Terra per l'ampiezza ω, in radianti, dell'angolo P$\hat{O}$Q (figura 7)

Considerato adesso il triangolo PQH, isoscele sulla base PQ e indicato con M il punto medio di PQ, si ha: $\overline{PM} = \overline{HP} \sin\frac{\beta}{2}$, essendo β la latitudine di P; d'altro canto nel triangolo PQO, isoscele sulla base PQ, si ha:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{HP}\sin\frac{\beta}{2}}{\overline{OP}};$$

siccome $\overline{HP} = \overline{OP}\cos\alpha$, allora: $\sin\frac{\omega}{2} = \cos\alpha \sin\frac{\beta}{2}$. Pertanto: $\sin\frac{\omega}{2} = 0{,}75738 \times 0{,}69622$ ossia: $\sin\frac{\omega}{2} = 0{,}52730$. Da qui segue: $\frac{\omega}{2} = 0{,}55542$ rad e, dunque: $\omega = 1{,}11084$ rad. Si ha, in definitiva:

$$\text{dist (Napoli, NewYork)} = R\,\omega = 6.372 \times 1{,}11084 \approx 7.078 \text{ (km)}.$$

NOTA BENE. Quest'esercizio conferma, se ce n'era bisogno, che il percorso lungo l'arco di circonferenza massima passante per i due punti è minore dell'arco di parallelo che congiunge i due punti. In effetti, i paralleli non sono circonferenze massime della superficie sferica, se si esclude l'Equatore, che è l'unico parallelo ad essere anche una circonferenza massima.

5. I procedimenti seguiti nei due esercizi 1 e 2 possono essere estesi a tutte le situazioni analoghe e, pertanto, indicate con (ϑ', φ') le coordinate geografiche del punto P (la prima componente indica la latitudine) e con (ϑ'', φ'') quelle di Q, dove le ampiezze coinvolte sono espresse in radianti, si ha in ogni caso: dist(P,Q)=Rω, dove R è il raggio della Terra e inoltre:

- se i due punti si trovano su uno stesso meridiano ($\varphi' \approx \varphi''$) allora:

  (1) $$\boldsymbol{\omega = |\vartheta' - \vartheta''|}$$

- se i due punti si trovano su uno stesso parallelo ($\vartheta' \approx \vartheta''$) allora ω è tale che:

  (2) $$\boldsymbol{\sin\frac{\omega}{2} = \cos\vartheta' \sin\frac{|\varphi' - \varphi''|}{2}}.$$

- Se i due punti P e Q della superficie sferica non sono situati sullo stesso meridiano né sullo stesso parallelo, il procedimento per calcolare ω=PÔQ richiede qualche considerazione più sofisticata. Intanto forniamo la formula che permette di calcolare tale ampiezza:

(3) $$\mathbf{\cos\omega = \cos(\varphi' - \varphi") \cos\vartheta' \cos\vartheta" + \sin\vartheta' \sin\vartheta"}.$$

Applicando la formula precedente, è possibile calcolare, per esempio, la distanza Roma-NewYork.

Bisogna tener presente ovviamente che le coordinate geografiche di Roma sono 41°54' di latitudine Nord e 12° 29' di longitudine Est, mentre quelle di New York, già indicate prima, sono 40°43' di latitudine Nord e 74°00' di longitudine Ovest.

Incominciamo allora a costatare che si ha:

$$\cos\omega = \cos\ (12°29' + 74°00') \cos 41°54' \cos 40°43' \ + \sin 41°54' \sin 40°43' =$$
$$= 0{,}06134 \times 0{,}74431 \times 0{,}75984 \ + 0{,}66783 \times 0{,}65232 = 0{,}47033,$$

e perciò ω = 1,08113 rad.

Dunque: dist (Roma, NewYork) = 6.372 × 1,08113 ≈ 6.889 (km).

Ritorniamo per un momento sulla distanza Napoli – NewYork. Prima l'abbiamo calcolata, trovando il valore di 7.078 km, supponendo che le due città si trovassero sullo stesso parallelo (ϑ≈40°46'). In realtà, come già specificato, le latitudini effettive di Napoli e NewYork sono rispettivamente di 40°50'N e 40°43'N. Ebbene, vogliamo calcolare la distanza fra le due città sulla base di questi dati, ricordando che la longitudine di Napoli è di 10°15'E e quella di NewYork è di 74°00'W. Si ha allora:

$$\cos\omega = \cos\ (14°15' + 74°00') \cos 40°50' \cos 40°43' \ + \sin 40°50' \sin 40°43' =$$
$$= 0{,}03054 \times 0{,}75661 \times 0{,}75794 + 0{,}65386 \times 0{,}65232 = 0{,}44403.$$

Pertanto: ω=1,11070 rad.

Dunque: dist (Napoli, NewYork) = 6.372 × 1,11070 ≈ 7.077 (km).

Come si può costatare, il risultato trovato adesso differisce di un'inezia da quello trovato prima.

6. Osserviamo che, quando φ'=φ", dalla (3) si deduce la (1) e, quando ϑ'=θ", dalla (3) si desume la (2).

Dimostriamo questi due fatti.

- Incominciamo col primo.

Se φ'=φ" la (3) assume la forma seguente:

$$\cos\omega = \cos\vartheta' \cos\vartheta" + \sin\vartheta' \sin\vartheta" \quad \text{ossia:} \quad \cos\omega = \cos\,(\vartheta' - \vartheta")\,;$$

e pertanto, tenendo presente che si tratta di angoli minori di un angolo giro:

$$\omega = |\vartheta' - \vartheta"|.$$

- La dimostrazione che dalla (3) segue la (2) è un po' più complicata.

Se ϑ'=θ" la (3) diventa:

$$\cos\omega = \cos(\varphi' - \varphi") \cos^2\vartheta' + \sin^2\vartheta'\,,$$

vale a dire:

$$\cos\omega = \cos(\varphi' - \varphi") \cos^2\vartheta' + (1 - \cos^2\vartheta')\,,$$

e quindi si ha:

$$1 - \cos\omega = \cos^2\vartheta' \cdot (1 - \cos(\varphi' - \varphi"))\,.$$

D'altro canto, tenendo presenti le formule di bisezione, risulta:

$$1 - \cos\omega = \sin^2\frac{\omega}{2} \quad \text{e} \quad 1 - \cos(\varphi' - \varphi") = \sin^2\frac{\varphi' - \varphi"}{2}.$$

La formula (3) assume pertanto la seguente forma:

$$\sin^2\frac{\omega}{2} = \cos^2\vartheta' \cdot \sin^2\frac{\varphi' - \varphi"}{2}\,,$$

da cui segue la (2).

7. È giunto il momento di dimostrare la formula (3). Per questo abbiamo bisogno anzitutto di riferire lo spazio ad una sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz). Lo facciamo assumendo che O sia il centro della

Terra, l'asse x la retta OA orientata da O verso A, il piano xy sia il piano equatoriale e l'asse z sia l'asse polare orientato da Sud verso Nord (figura 8).

Con questo riferimento, un generico punto P situato sulla superficie terrestre ha coordinate geografiche (ϑ, φ) e coordinate cartesiane (x, y, z). Ci interessa esprimere le seconde in funzione delle prime. Al riguardo, ricordando che R è il raggio terrestre e indicando con H la proiezione ortogonale di P sul piano xy e con U e V le proiezioni ortogonali di H rispettivamente sull'asse x e sull'asse y, con riferimento al triangolo OUH, rettangolo in U, si ha:

$$\overline{OU} = \overline{OH} \cos U\widehat{O}H\,, \quad \text{ossia:} \quad x = \overline{OH} \cos \varphi\,.$$

D'altra parte, con riferimento al triangolo OHP, rettangolo in H, si ha:

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos P\widehat{O}H \quad \text{ossia:} \quad \overline{OH} = R \cos \vartheta\,.$$

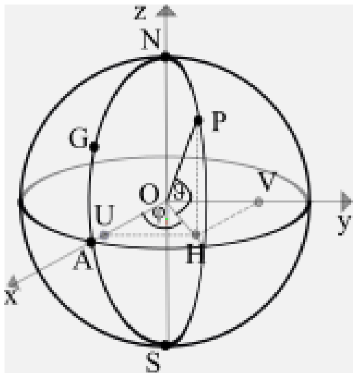

figura 8

Dunque:

$$x = R \cos \vartheta \cos \varphi\,.$$

Consideriamo adesso il triangolo OVH, rettangolo in V. Si ha:

$$\overline{OV} = \overline{OH} \cos V\widehat{O}H\,, \quad \text{ossia:} \quad y = R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \quad \text{e} \quad \text{quindi:} \quad y = R \sin \varphi\ ;$$

pertanto:

$$y = R \cos \vartheta \sin \varphi\,.$$

Infine, con riferimento al triangolo HOP, rettangolo in H, si ha:

$$\overline{HP} = \overline{OP} \sin H\widehat{O}P\,, \quad \text{ossia:} \quad z = R \sin \vartheta\,.$$

Una volta trovato il legame fra le coordinate geografiche e le coordinate cartesiane del punto P, la chiave di volta per il passo successivo è fornita dalla definizione di prodotto scalare di due vettori e da una proprietà di tale prodotto. Si tratta, in realtà di cose note, ma le voglio ugualmente ricordare.

Dati due vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, di componenti cartesiane, rispettivamente: (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), si definisce prodotto scalare di $\vec{u}_1$ per $\vec{u}_2$ il numero reale, indicato con $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$ tale che:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\,.$$

Questa è invece la proprietà, che a volte è assunta proprio come definizione di prodotto scalare di due vettori. Anzi, è esattamente in questo modo che si fa in Fisica.

PROPRIETÀ. Se α è l'angolo dei due vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, risulta:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = u_1 u_2 \cos \alpha\,,$$

essendo u_1 e u_2 i moduli dei vettori.

DIMOSTRAZIONE. Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), si considerino i due vettori $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, rappresentati nell'ordine dai due segmenti orientati $(O, U_1), (O, U_2)$ e siano (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) le coordinate dei due punti U_1 e U_2; coordinate che sono anche le componenti cartesiane dei due vettori. Sia inoltre α l'angolo dei due vettori (figura 9).

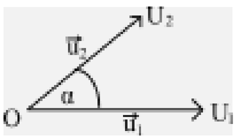

figura 9

In virtù del teorema del coseno, applicato al triangolo U_1OU_2, si ha:

$$\overline{U_1U_2}^2 = \overline{OU_1}^2 + \overline{OU_2}^2 - 2\, \overline{OU_1} \cdot \overline{OU_2} \cos \alpha\,.$$

Da qui segue:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = ({x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2) + ({x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2) - 2\, u_1 u_2 \cos\alpha$$

e, a conti fatti:

$$x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2 = u_1\, u_2 \cos\alpha$$

e perciò, così come si doveva dimostrare:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = u_1\, u_2 \cos\alpha\,.$$

Considerati adesso sulla superficie terrestre due punti, P e Q, tali che sia ω l'angolo $P\widehat{O}Q$, risulta intanto:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = R^2 \cos\omega\,.$$

Se poi sono $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ le coordinate cartesiane di P e Q, considerato che tali coordinate sono anche le componenti cartesiane dei due vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$, si ha pure:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Di conseguenza, confrontando le due espressioni, risulta:

$$\cos\omega = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{R^2}\,.$$

Supponiamo adesso che siano (ϑ', φ') e (ϑ'', φ'') le coordinate geografiche di P e Q rispettivamente. Sappiamo che si ha:

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\vartheta'\cos\varphi' \\ y_1 = R\cos\vartheta'\sin\varphi' \\ z_1 = R\sin\vartheta' \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = R\cos\vartheta''\cos\varphi'' \\ y_2 = R\cos\vartheta''\sin\varphi'' \\ z_2 = R\sin\vartheta'' \end{cases}$$

Risulta pertanto:

$$\cos\omega = (\cos\vartheta'\cos\varphi') \cdot (\cos\vartheta''\cos\varphi'') + (\cos\vartheta'\sin\varphi') \cdot (\cos\vartheta''\sin\varphi'') + (\sin\vartheta') \cdot (\sin\vartheta'')\,.$$

Adesso basta elaborare l'espressione al secondo membro e si ottiene la formula cercata. Di fatto:

$$\cos\omega = \cos\vartheta'\cos\vartheta''\,(\cos\varphi'\cos\varphi'' + \sin\varphi'\sin\varphi'') + \sin\vartheta'\sin\vartheta'' =$$
$$= \cos(\varphi' - \varphi'')\cos\vartheta'\cos\vartheta'' + \sin\vartheta'\sin\vartheta''\,.$$

8. Alcune considerazioni supplementari, per valutare a quali lunghezze corrispondono 1° di latitudine e 1° di longitudine.

- 1° di latitudine su un qualsiasi meridiano, considerato che 1°≈0,01745 rad, equivale alla lunghezza L tale che: L=6.372×0,01745≈111,191 (km).

Un calcolo più preciso fornisce il valore di 111, 121 km.

- 1° di longitudine su un parallelo dipende invece dal parallelo e diminuisce mentre ci si sposta dall'equatore, dove ha il valore massimo, ai poli, dove è uguale a 0.

Per esempio, sull'equatore equivale ancora a circa 111,191 km, cosa facilmente spiegabile.

Ma un calcolo più preciso, che tiene conto dello schiacciamento della Terra ai poli e del suo rigonfiamento all'equatore, fornisce il valore di 111,321 km.

Su uno dei circoli tropicali ($\vartheta = \pm 23°27'$), si ha:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \cos 23°27' \sin 30' = 0{,}91741 \times 0{,}00873 = 0{,}00801\,,$$

per cui:

$$\frac{\omega}{2} = 0{,}00801 \quad \text{e perciò:} \quad \omega = 0{,}01602\,.$$

Di conseguenza: L=6.372×0,01602=102,079 (km).

Questo implica che la lunghezza del circolo tropicale è circa 102,079×360=36.748 (km).

Anche adesso, calcoli più accurati danno il valore di circa 37.768 km.