Le proprietà della funzione integrale

QUESITO 2 Esame di Stato corso di ordinamento, sessione ordinaria 2001,
Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale,

tale che f(0) = 2. Calcolare: $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x}$ *dove e è la base dei logaritmi naturali.*

Soluzione

Per determinare il limite, il candidato deve riconoscere la presenza della forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e l'applicabilità del teorema di de L'Hopîtal.

Essendo f continua in ℝ, la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è continua e derivabile in ℝ con $F'(x) = f(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x} == \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2e^x(x+1)} = \frac{2}{2} = 1$$

Quesito 6-Ordinamento sessione ordinaria – 2003

La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt$ *è la funzione* $f'(x) = 2xe^{-x^4}$
Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare la risposta

Soluzione

Il candidato deve riconoscere, nella funzione di cui si chiede la derivata, una funzione composta
$f(z) = \int_0^z e^{-t^2}\, dt \quad ove\ z = x^2$
Pertanto, $f'(x) = f'(z) \cdot z'(x) = e^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2xe^{-x^4}$

Quesito 6-Autonomia sessione ordinaria – 2002

Calcolare la derivata rispetto a x della seguente funzione $f(x) = \int_x^{x+2} e^{-t} dt$ *dove e è la base dei logaritmi naturali.*

Soluzione

Sfruttando l'additività dell'integrale definito, scriviamo , con $x < a < x+2$
$f(x) = -\int_a^x e^{-t}dt + \int_a^{x+2} e^{-t}dt \to f'(x) = -e^{-x} + (e^{-x-2})\frac{d(x+2)}{dx} = e^{-x}\left(-1 + \frac{1}{e^2}\right) = \frac{1-e^2}{e^2}\, e^{-x}$

I metodi grafici

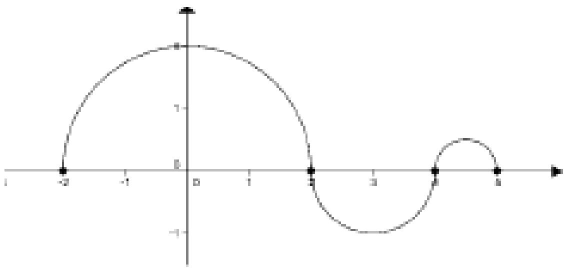
L'anno 2010 ha segnato il passaggio , nelle prove d'esame e nella prassi didattica, dal classico studio di funzione (dall'espressione analitica di f(x) al suo grafico) a problemi del tipo " dal grafico all'espressione analitica " o "dal grafico di una funzione all'andamento della sua derivata o di una sua primitiva". Ai calcoli e alle procedure, spesso standardizzate, si sostituisce l'intuizione geometrica e la logica argomentativa.

Il primo problema ,PNI - sessione ordinaria 2010, era innovativo nella formulazione e nelle richieste e, per la prima volta, la traccia di una prova d'esame si avvaleva del supporto di un'immagine esplicativa.

Questo il testo del problema

PROBLEMA 1 PNI ordinaria 2010

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ *per* $-2 \leq x \leq 5$ *essendo* g *la derivata di una funzione* f. *Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in* $(0,0), (3,0), (\frac{9}{2}, 0)$ *e raggi rispettivi 2, 1,* $\frac{1}{2}$.

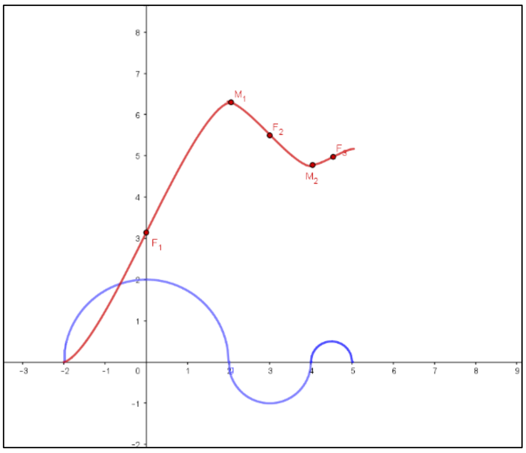


a) Si scriva un'espressione analitica di $g(x)$. *Vi sono punti in cui* $g(x)$ *non è derivabile? Se sì, quali sono? E perchè?*
b) Per quali valori di $x, -2 < x < 5$, *la funzione* f *presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.*
c) Se $f(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\, dt$ *si determini* $f(4)$ *e* $f(1)$.
d) Si determinino i punti in cui la funzione f *ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di* $f(x)$*? Qual è l'andamento qualitativo di* $f(x)$*?*

I primi due quesiti non fanno alcun riferimento al concetto di funzione integrale . Della funzione f si sa solo che è una primitiva della funzione g. Poichè tutte le primitive di una stessa funzione differiscono solo di una costante additiva, si può studiare la monotonia di f ma non il segno, nè se ne possono determinare alcuni particolari valori .

Nella seconda parte si stabilisce che $f(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\, dt$ è la funzione integrale , associata a g, di punto iniziale (-2;0) , per cui è verificata la condizione $f(-2) = 0$.

Il suo significato geometrico è l'area compresa tra l'arco di curva di estremi (-2,0) e (x;0) e l'asse delle ascisse.



Il calcolo dell' area ,che si avvale del contributo positivo delle regioni di piano corrispondenti ad archi di curva appartenenti al semipiano delle y positive e del contributo negativo delle regioni appartenenti al semipiano delle y negative, può essere effettuato per via elementare.

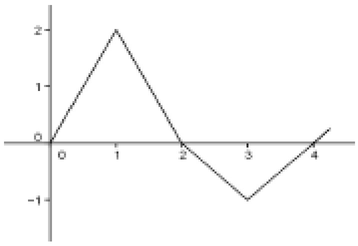
Le informazioni relative al segno, della monotonia e della concavità , insieme ai valori noti di $f(-2), f(1)$ e $f(4)$, contribuiscono a tracciare l'andamento della funzione f.

La richiesta dell'andamento della funzione integrale, a partire da quello di una sua derivata, compare ancora nel primo problema dei corsi sperimentali della sessione ordinaria del 2012 e in quella del 2014 , inoltre nel secondo problema della sessione ordinaria 2016.

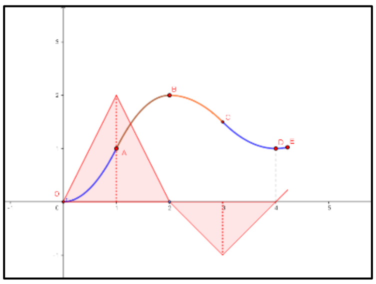
Abbastanza semplice ma significativo il Quesito 8 del corso di ordinamento del 2013

Quesito 8-Ordinamento sessione ordinaria – 2013

La funzione f ha il grafico in figura.
Se $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, per quale valore positivo di x, g ha un minimo? Si illustri il ragionamento seguito.



Soluzione



Il grafico suggerisce che f è una funzione continua in un intervallo oppure ammette discontinuità di terza specie
g(x) è continua e la sua derivata è f(x) (escludendo gli eventuali punti di discontinuità)
Dal segno di f , si deduce che g(x) cresce per x che varia da 0 a 2 e decresce per x che va da 2 a 4 per crescere ancora a destra di 4
Pertanto, g(x) ha un minimo locale per x=4.

Funzioni integrabili e primitive

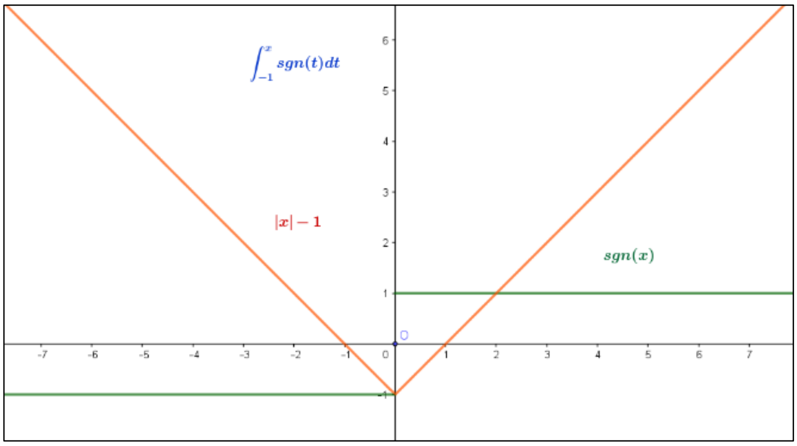
Il quesito seguente, assegnato nella sessione suppletiva del 2005 (corsi sperimentali) richiama l'attenzione sul confronto tra il concetto di funzione integrabile e quello di funzione primitiva.

Quesito 7 Corsi sperimentali- sessione suppletiva -2005
Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato [a, b], non necessariamente ammette primitiva in [a, b].
Risposta
E' evidente che una funzione $f\ :\ [a,b]\ \rightarrow\ \mathbb{R}$]che presenti un punto di discontinuità di prima specie in $x_0 \in (a;b)$ non può essere dotata di primitiva nell'intervallo considerato.
Infatti, per ogni funzione F(x) tale che F'(x)= f(x) in $x \neq x_0$, il limite del rapporto incrementale destro, nell'intorno di x_0, sarebbe diverso dal limite del rapporto incrementale sinistro.

Poichè una funzione $f\ :\ [a,b]\ \rightarrow\ R$, limitata, può essere integrabile secondo Riemann anche in presenza di un numero finito punti di discontinuità, si può affermare che non necessariamente ammette primitiva in [a, b].
Esempio: la funzione

$$sign(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$ è integrabile in ogni intervallo$[\mathrm{a},\mathrm{b}]$contenete lo 0

La funzione integrale $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} \mathrm{sign(t)\ dt} \ = |\mathrm{x}| - |\mathrm{a}|$ non è derivabile in 0 dove presenta un punto angoloso



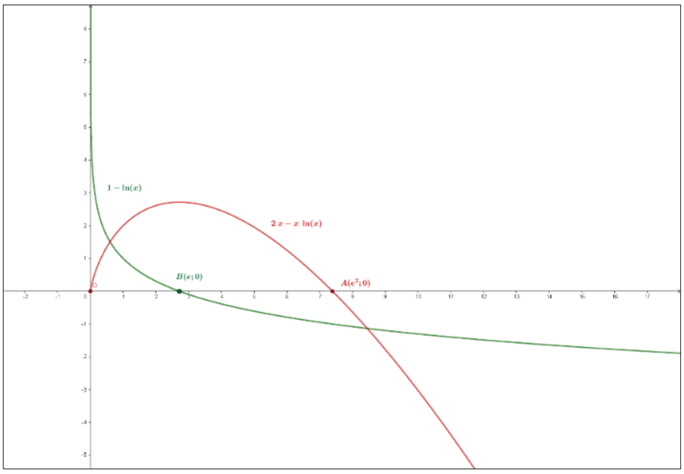
Solitamente il concetto di integrabilità e l'esistenza della funzione integrale sono associati alle funzioni continue. Il quesito precedente può essere un ottimo stimolo a rivedere in senso critico alcune definizioni acquisite, a generalizzare il Teorema fondamentale del Calcolo integrale, a portare esempi o controesempi.

La funzione integrale con funzione integranda illimitata

Quesito8 Esame di Stato corsi sperimentali, sessione straordinaria 2003,
Considerata la funzione $f(x) = \int_0^x (1 - \ln t)\, dt$ *con x>0, determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce*

Soluzione
La funzione integranda è illimitata nell'intervallo $]0;+\infty]$ poiché tende rispettivamente a$+\infty$ e a $-\infty$ agli estremi dell'intervallo.
Una sua primitiva è $2t - t\ln t$, ricordando che

$$\int \ln t\, dt = t \cdot \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t}\, dt = t \cdot \ln t - t + c$$



Per lo studio della funzione integrale conviene osservare il grafico della funzione integranda
La funzione $f(x)$ cresce nell'intervallo $]0;e[$ in cui la sua derivata è positiva, decresce nell'intervallo $]e;+\infty[$in cui la derivata è negativa.
Se a è un numero positivo, per la proprietà additiva dell'integrale definito possiamo scrivere

$$\int_a^x (1 - \ln t)\, dt = \int_a^e (1 - \ln t)\, dt + \int_e^x (1 - \ln t)\, dt =$$
$$= 2e - e - 2a + a\ln a + 2x - x\ln x - 2e + e = 2x - x\ln x - 2a + a\ln a$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty} (2x - x\ln x) = -\infty$ mentre $\lim_{x\to 0^+} (2a - a\ln a) = 0$ si ottiene che l'integrale diverge per x tendente a $+\infty$ e converge per x tendente a 0 .
La funzione integrale $f(x) = \int_0^x (1 - \ln t)\, dt$ può essere prolungata in modo continuo per x=0, ma avendo posto la restrizione x>0 , scriveremo
$f(x) = 2x - x\ln x = x(2 - \ln x)$.
L'unico zero sarà $x = e^2$

Un quesito analogo è stato poi assegnato nel 2015 nella sessione suppletiva.

A differenza del quesito precedente non è posta, però, alcuna restrizione al dominio della funzione integrale che dovrà essere determinato dal candidato.

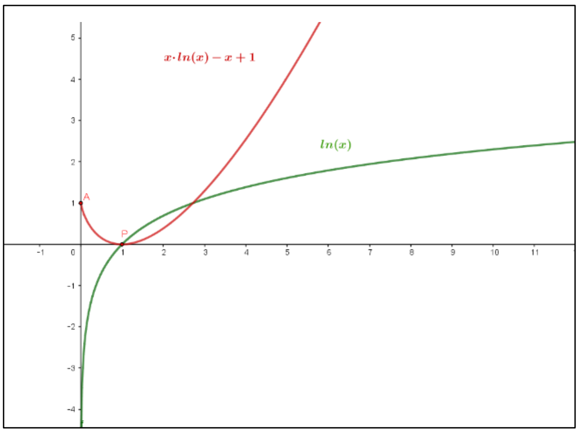
Quesito 1 – Suppletiva 2015

Data la funzione integrale $\int_1^x \ln t \; dt$, determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.

Soluzione

La funzione integranda è definita e continua nell'intervallo aperto $(0; +\infty)$ ed è illimitata essendo $\lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty \quad \lim_{t\to +\infty} \ln t = +\infty$l

E' quindi continua e integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato $[1; x]$ con $x > 0$, ma è anche integrabile in senso improprio se x=0 .



Infatti, indicato con a è un numero reale positivo, risulta

$$\lim_{a\to 0^+} \int_1^a \ln t \, dt = \lim_{a\to 0^+} [t \ln t - t]_1^a =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} [a \cdot \ln a - a - 0 + 1] = 1$$

Il dominio della funzione integrale

$F(x) = \int_1^x \ln t \; dt$,è, pertanto ,l'intervallo x≥ 0 , cioè $F(x)$ è prolungabile in modo continuo in x=0

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x - x + 1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Per determinare i punti in cui il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$ risolviamo l'equazione

$$x \cdot \ln x - x + 1 = 2\mathrm{x} + 1 \;\rightarrow\; \mathrm{x}(\ln \mathrm{x} - 3) = 0 \rightarrow \quad \mathrm{x} = 0 \quad \cup \; \mathrm{x} = \mathrm{e}^3$$

I punti di incontro sono $\quad A(0; 1)\; e \; B(e^3; 2e^3 + 1)$

Osservazioni

Il quesito così formulato appare piuttosto insidioso . Uno studente che non abbia dimestichezza con lo studio di una funzione integrale è probabile che <<veda>> solo un integrale definito con un estremo variabile e continuerà a lavorare nell'intervallo x>0, dominio della funzione integranda.

Se è coerente, trovate le soluzioni dell'equazione

$$x \cdot \ln x - x + 1 = 2\mathrm{x} + 1 \quad \to \mathrm{x} = 0 \quad \mathrm{e} \ \mathrm{x} = \mathrm{e}^3$$

osserverà che i solo la seconda accettabile e che esiste un solo punto di incontro tra il grafico di F(x) e la retta.

Una formulazione che privilegi il significato geometrico della funzione integrale rispetto all'esecuzione dei calcoli, potrebbe orientare il candidato e invitarlo a riflettere sul dominio di $F(x)$.

Data la funzione integrale $F(x) = \int_1^x \ln t \ dt$ *, si calcoli il valore di* $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ *e di* $\lim_{x\to +\infty} F(x)$ *e se ne indichi il significato geometrico.*

Si confronti il grafico di $F(x)$ *con quello della funzione integranda .*

Per quali valori di x il grafico di quest'ultima incontra la retta di equazione

$y = 2x + 1$?

La funzione integrale nella teoria delle variabili aleatorie

Quesito 8. Suppletiva 2016

Supponiamo che l'intervallo di tempo t(in anni) tra due cadute di fulmini in un'area di 100 m^2 *sia dato da una variabile casuale continua con funzione di ripartizione:*

$P(t \leq z) = \int_0^z 0{,}01 e^{-0{,}01 s} \, ds$

a) *Si calcoli la probabilità che, in tale area, i prossimi due fulmini cadano entro non più di 200 anni l'uno dall'altro*
b) *Si determini qual è il minimo numero di anni z , tale che sia almeno del 95% la probabilità che i prossimi due fulmini cadano in tale area entro non più di z anni l'uno dall'altro*

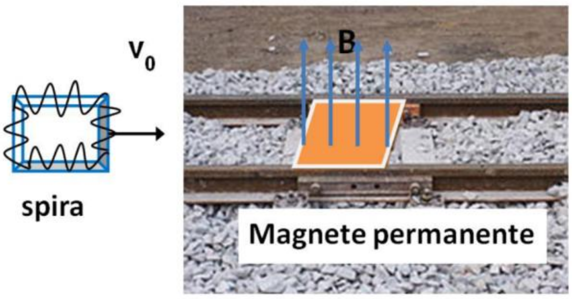
Soluzione

Un’applicazione alla Fisica

Problema 1. Esempio -MIUR- prova integrata di Matematica e Fisica. 20 dicembre 2018

PROBLEMA 1

Hai giocato con il tuo fratellino con un trenino elettrico da lui ricevuto in regalo per il compleanno. Osservandolo, più volte ti sei chiesto quale sia il principio di funzionamento delle varie parti. In particolare hai osservato che quando un vagone viene immesso in un binario morto, nei pressi del respingente finale il vagone subisce un forte rallentamento fino quasi a fermarsi; questo consente al vagone di raggiungere il respingente finale con velocità molto bassa e quindi di colpirlo senza conseguenze. Per capire il funzionamento di questo freno, hai analizzato in dettaglio il binario morto e un vagone; hai notato che sulla parte finale del binario morto è presente un piccolo magnete permanente di forma quadrata di lato $L = 5{,}0cm$ fissato tra le due rotaie del binario. Inoltre sul fondo del vagone è presente una cornice quadrata di dimensione uguale al magnete su cui è avvolto un filo a formare una spira quadrata di resistenza elettrica $R = 0{,}020\Omega$. Analizzando il moto del vagone hai compreso che quando il vagone passa sopra il magnete, anche la spira passa sopra il magnete (come mostrato in figura) e che in questo passaggio il vagone rallenta.



1. Spiega qualitativamente l’origine della azione frenante dovuta al passaggio della spira sopra al magnete.

2. Assumendo che il magnete permanente generi sopra di sé un campo magnetico $B{=}0{,}85T$ uniforme, perpendicolare al magnete stesso (e quindi anche alla spira) e trascurando tutti gli effetti di bordo, dimostra che l’equazione del moto della spira durante il passaggio sul magnete è:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2v}{R}$$

dove $m{=}50g$ è la massa del vagone.

3. Verifica che l’equazione del moto ha come soluzione $v = v_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ dove v_0è la velocità del vagone (e quindi della spira) quando entra nel campo del magnete permanente, esprimendo la costante τ in termini delle altre grandezze presenti nell’equazione del moto e calcolandone il valore numerico.

4. Assumendo per la velocità iniziale il valore v_0 $=0{,}20^{m}/_{s}$, determina il tempo che la spira impiega ad attraversare completamente il magnete e la velocità che essa ha dopo aver attraversato il magnete.

5. Dimostra che se la velocità iniziale v_0 è inferiore ad un valore limite, la spira non riesce a superare il magnete permanente: in queste condizioni il freno agisce come un blocco

Soluzione