LUOGHI GEOMETRICI AGLI ESAMI DI STATO : La versiera di Gaetana Agnesi.

Tra i commenti dei media ,che accompagnano inevitabilmente lo svolgersi delle prove scritte degli esami di Stato, fece spicco questa frase apparsa su Repubblica il 20 giugno 2013, in occasione della seconda prova: *<<Un brano di Quintiliano per il liceo Classico, Fitzgerald per il Linguistico e la matematica illuminista Maria Gaetana Agnesi per lo Scientifico: questi gli argomenti per le tracce dei licei>>*

Anche il compito di matematica veniva associato a un classico o a un autore illustre, come le prove degli indirizzi umanistici!

Il francobollo emesso in occasione del terzo centenario della nascita di Gaetana Agnesi

In verità, nel testo del problema di quell'anno (secondo problema dell'indirizzo di ordinamento), benché fosse palese il riferimento alla nota versiera e alle sue proprietà, non erano menzionati nè il nome della curva, nè quello della <<scienziata quasi dimenticata , ma molto brillante>>, come osservava ancora il prof. Fiorenza del dipartimento di Matematica della "Sapienza" di Roma.

Di Maria Gaetana Agnesi si è poi parlato e scritto molto nel 2018, per il terzo centenario della sua nascita, della versiera invece si era parlato esplicitamente in altri due problemi di maturità, nella sessione suppletiva del 1997 (Progetto Brocca) e nella sessione ordinaria del 2003 (PNI).

Possiamo essere certi , inoltre, che nelle prove d'esame sì continuerà a prendere in considerazione le interessanti proprietà di questa "curva celebre" , proprietà che possono essere sfruttate con diversi obiettivi e formulazioni differenti.

Va osservato, inoltre, che sebbene la curva sia associata solitamente al problema, squisitamente geometrico, posto da Gaetana Agnesi nel suo trattato Istituzioni analitiche per la gioventù italiana , la funzione si presta a fornire un modello matematico di fenomeni fisici (fenomeni di risonanza) e trova posto nella teoria della probabilità(distribuzione di Cauchy)

Proponiamo un confronto tra le formulazioni dei tre problemi riguardo ai temi comuni e una riflessione più generale sulle tracce, valutandone l'attualità alla luce delle Indicazioni nazionali e dei Quadri di riferimento per la prova di matematica del liceo scientifico.

Le Tracce

PROBLEMA 2 Suppletiva-Brocca 1997

Il candidato rappresenti graficamente la curva d'equazione

$$x^2y = a^2(a - y) \quad (1)$$

essendo a una costante positiva.

La curva assegnata figura nelle Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana (1748) di Maria Gaetana Agnesi (1718 - 1799) - donde il nome di versiera di Agnesi - come soluzione del seguente problema:

"Dato il semicircolo ADC del diametro AC, si ricerca fuori di esso il punto M tale che condotta MB normale al diametro AC, che taglierà il circolo in D, sia AB : BD = AC : BM e perché infiniti sono i punti M, che soddisfanno al problema, se ne dimanda il luogo."

Il candidato

a) verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di riferimento cartesiano, la (1) è l'equazione del luogo geometrico richiesto nell'enunciato del problema [si ponga $AC = a, B \in AC$];

b) dette P_1 e P_2, rispettivamente, le intersezioni con l'asse x delle tangenti alla curva nei punti di flesso F_1 e F_2, calcoli l'area della regione di piano delimitata dall'arco di curva di estremi F_1 e F_2 e dai segmenti P_1F_1, P_2F_2; .

c) verifichi che l'area compresa fra la curva e l'asse delle x è quattro volte quella del cerchio di diametro AC;

d) enunci i metodi numerici, che conosce, per approssimare un integrale definito illustrando altresì come si può migliorare generalmente un'approssimazione per ottenere una maggiore precisione.

PROBLEMA 1 Ordinaria PNI 2003

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ il punto C intersezione di r con t.

La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di versiera di Agnesi [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718-1799)].

1. *Si provi che valgono le seguenti proporzioni:*

   OD : DB = OA : DP

   OC : DP = DP : BC

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA;

2. *Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è:*

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

3. *Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ*

PROBLEMA 2 Ordinaria- Ordinamento 2013

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$

1. *Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P\ (-2;1)$ e $Q\ (2;1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ . Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure in gradi e primi sessagesimali dei suoi angoli interni*
2. *Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0,1)$.*

Una retta t, per l'origine degli assi taglia Γ, oltre che in O in un punto A e taglia la retta di equazione $y = 2$ in un punto B.

Si provi che, al variare di t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate (x, y) di un punto di Φ

3. *Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo [0, 2]. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio*
4. *La regione R , ruotando intorno all'asse y, genera il solido W.*

Si scriva, spiegandone il perché ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

La struttura del testo

Le tracce sono suddivise in 4 punti nella prima e nella terza, in 3 nella seconda. L'indipendenza tra le richieste è sufficientemente garantita , anche se non completa, come d'altra parte ci si aspetta da un problema .

L'espressione analitica del luogo geometrico è posta all'inizio nel primo e terzo problema, con la richiesta dello studio della funzione (nel primo è assegnata in forma implicita) . In tutti e tre i problemi è comunque nota e fa anche da struttura di controllo dei risultati.

I contenuti

I tre problemi fanno riferimento a concetti, metodi e obiettivi di studio evidenziati nelle Indicazioni nazionali :
1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);
2) gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, una buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;
Il tema, comune a tutte e tre le tracce, è coerente con alcuni obiettivi citati nei Quadri di riferimento per la prova scritta di Matematica:

A) Geometria

- Utilizzare i risultati principali della geometria euclidea, in particolare la geometria del triangolo e del cerchio, le proprietà dei parallelogrammi, la similitudine e gli elementi fondamentali della geometria solida; dimostrare proposizioni di geometria euclidea, con metodo sintetico o analitico
- Scegliere opportuni sistemi di riferimento per l'analisi di un problema.
- Determinare luoghi geometrici a partire da proprietà assegnate.
- Servirsi delle funzioni circolari per esprimere relazioni tra gli elementi di una data configurazione geometrica.
- Applicare simmetrie, traslazioni e dilatazioni riconoscendone i rispettivi invarianti.

B) Analisi

- A partire dall'espressione analitica di una funzione, individuare le caratteristiche salienti del suo grafico e viceversa

- Determinare la derivata di una funzione ed interpretarne geometricamente il significato.

- Interpretare geometricamente l'integrale definito e applicarlo al calcolo di aree.

- Determinare primitive di funzioni utilizzando integrali immediati, integrazione per sostituzione o per parti.

<u>In particolare : Aree e volumi</u>

In tutti e tre i problemi è richiesto il calcolo dell'area compresa tra la curva e il suo asintoto, argomento di indubbio spessore che evidenzia, inoltre, un interessante legame tra la versiera e il cerchio utilizzato nella sua costruzione:

l'area limitata dalla versiera e dal suo asintoto è pari al quadruplo di quella del cerchio.

Ricordiamo che, prima della sua divulgazione da parte dell'Agnesi, la curva è stata oggetto di studio nell'ambito dei problemi di quadratura , da parte di Fermat e di Guido Grandi.

Nella prima e terza traccia è richiesta anche l'area di una regione limitata da un arco di versiera e da opportuni segmenti.

Nel terzo problema la scelta dell'arco di curva ripropone il legame tra la versiera e il cerchio.

> *Terzo problema – punto 3.*
>
> *Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo [0, 2]. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio*

Area di R :

$$\int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,dx = 4\left[tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 = 4tan^{-1}\,1 = \pi$$ = *area del cerchio di raggio 1*

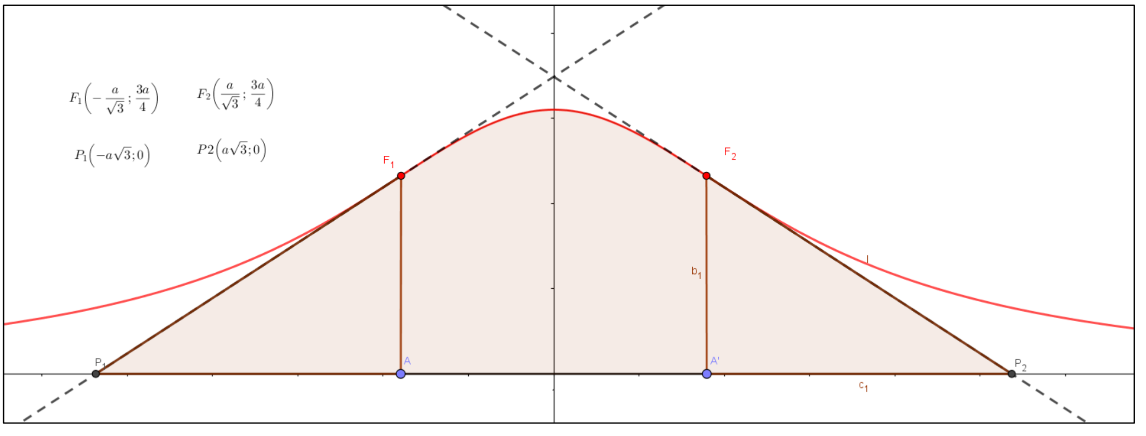
Generalizzando, la regione compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo $[0;k]$ *con* $k>0$ *è uguale a* $\int_0^k \frac{8}{4+x^2}\,dx = 4\left[tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^k = 4tan^{-1}\frac{k}{2}$

La regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è illimitata ma ad essa si può attribuire un valore finito pari a

$$\lim_{k\to+\infty} 2\int_0^k \frac{8}{4+x^2}\,dx = \lim_{k\to+\infty} 8\tan^{-1}\frac{k}{2} = 4\pi$$ *, valore quadruplo dell'area del cerchio.*

Nel primo problema si propone una regione più complessa ma, per evitare ulteriori difficoltà, si sceglie l'arco che ha per estremi i due flessi e le due tangenti inflessionali che non hanno ulteriori intersezioni con la curva.

Primo problema punto b) dette P_1 e P_2 rispettivamente le intersezioni con l'asse x delle tangenti alla curva hei punti di flesso F_1e F_2 si calcoli l'area della regione di piano limitata dall'arco di curva di estremi F_1e F_2 e dai segmenti P_1F_1, P_2F_2;



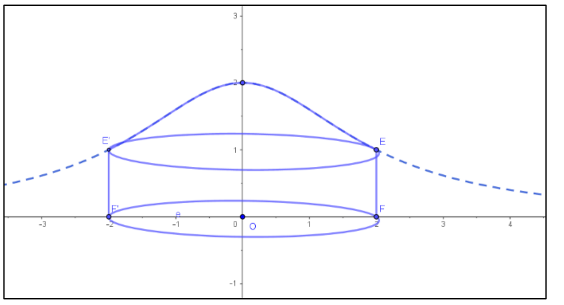
Confrontiamo infine l'ultimo punto della prima traccia con l'ultimo della terza

Entrambi propongono argomenti (rispettivamente integrazione numerica e volume di un solido di rotazione) non menzionati in modo esplicito nei Quadri di riferimento.

Tra l'altro il metodo implicitamente suggerito per il calcolo del volume è il metodo dei gusci cilindrici. Metodo poco noto e ,direi, inutilizzato nei percorsi didattici prima che facesse la sua comparsa nelle prove d'esame nel 2010 .

4.La regione R , ruotando intorno all'asse y, genera il solido W.

Si scriva, spiegandone il perché ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.



Il solido è costituito da un cilindro sormontato da un cilindroide Se si vuole esprimere il volume con un solo integrale definito si deve

utilizzare il metodo dei "gusci"

$$V = \int_0^2 2\pi x f(x)dx = \int_0^2 2\pi x \frac{8}{4+x^2}dx$$

La formulazione dei quesiti è però abbastanza originale poiché non è richiesto un risultato, ma la descrizione e la spiegazione del procedimento da utilizzare per ottenerlo.

Una formulazione che , specialmente per il problema del 2013, privilegia la concettualizzazione e valorizza le capacità espressive e argomentative rispetto alle tecniche risolutive.

Queste caratteristiche sono in pieno accordo con le Indicazioni nazionali :

L'approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità. ,>>

Il grafico della versiera- spunti di approfondimento

Nel riferimento cartesiano monometrico che ha l'origine in A, l'asse y coincidente con la retta AC (asse di simmetria), l'asse x coincidente con la tangente in A alla circonferenza (secondo la formulazione originale del problema dell'Agnesi),la funzione associata alla versiera, in generale, assume la forma

$$f(x) = \frac{8r^3}{x^2 + 4r^2}$$

dove r rappresenta la lunghezza del raggio della circonferenza che interviene nella sua costruzione.

Il suo grafico si può tracciare per via elementare, a livello qualitativo, considerando che , a meno del fattore $8r^3$, rappresenta il reciproco della parabola di equazione $y = x^2 + 4r^2$.

Utilizzando gli strumenti dell'Analisi si incontrano tutte le procedure fondamentali per lo studio della funzione : ricerca di asintoti, estremi relativi e assoluti, flessi.

La simmetria rispetto all'asse y rende più agevoli i calcoli.

<u>Studio della funzione relativa al terzo problema $(r = 1)$</u>

$$f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$$

La funzione è definita in R, è simmetrica rispetto all'asse y, è sempre positiva

Inoltre, $f(0) = 2$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = -\frac{16x}{(4+x^2)^2}$ $\qquad f''(x) = \frac{16(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$

Pertanto

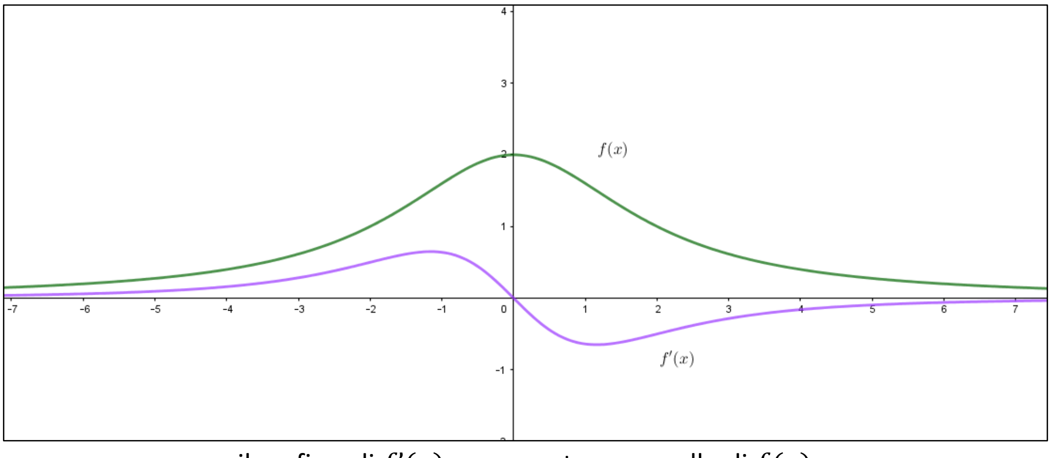
$f(x)$è crescente prima di 0 e decrescente dopo

L'asse delle x è asintoto orizzontale destro e sinistro.

Il punto $M(0;2)$ è massimo relativo e assoluto

La concavità è verso l'alto nei punti esterni all'intervallo di estremi x= $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, verso il basso nei punti interni.I punti $F_1(-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{3}{2})$ e $F_2(\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{3}{2})$ sono flessi

La ricerca di una primitiva riconduce agli esempi classici di funzioni razionali fratte e inoltre, il caratteristico andamento a campana rende il grafico della versiera idoneo a proporre quesiti relativi all'obiettivo dei Quadri di riferimento "*A partire dal grafico i grafici della sua derivata e di una sua funzione integrale*"



il grafico di $f'(x)$, comparato con quello di $f(x)$

Informazioni utili per il grafico di $f'(x)$

La funzione $f(x)$ ammette derivata prima e seconda in $\mathbb{R}$, pertanto $f'(x)$ è derivabile e necessariamente continua .

$f(x)$ è crescente per x<0, decrescente per x>0, presenta per x=0 un punto di stazionarietà.

La derivata prima, pertanto, è positiva nel primo intervallo, negativa nel secondo, si annulla per x=0.

Dalla concavità e convessità della curva si deduce che , indicati con x_F e $x_{F'}$ rispettivamente, le ascisse dei flessi F e F', la derivata seconda è positiva negli intervalli $]-\infty; x_F[$ e $]x_{F'}; +\infty[$ mentre è negativa bell'intervallo $]x_F; x_{F'}[$.

Pertanto, possiamo affermare che $f'(x)$ è crescente nei primi due intervalli, decrescente nel terzo, ha un massimo in x_F e un minimo in $x_{F'}$.

Inoltre, essendo monotona negli intervalli $]-\infty; x_F[$ *e* $]x_{F'}; +\infty[$, $f'(x)$ <u>ammette limite all'infinito</u> ; il suo valore è 0 in quanto

essendo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

sarà anche

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0\ , da\ cui, per\ il\ Teorema\ di\ De\ L'Hospital,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

La funzione integrale $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$ è monotona crescente e converge a un limite finito essendo la funzione integranda positiva e infinitesima del secondo ordine per x tendente a $\pm\infty$. Presenta un flesso in corrispondenza del massimo di f(x)

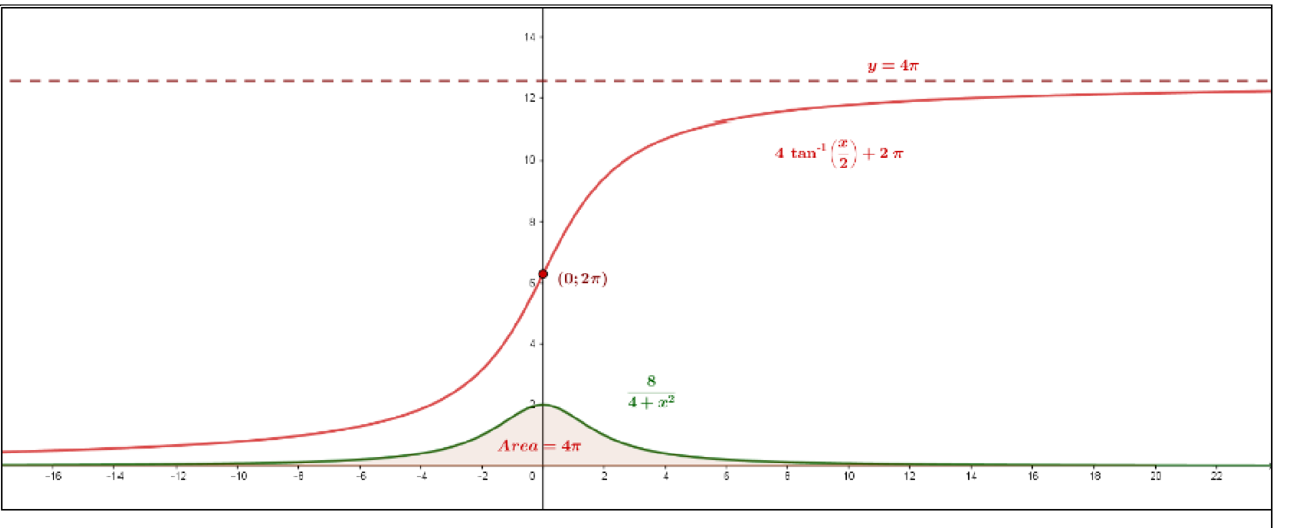


Grafico di $F_1(x)$ e di $f_1(x)$, dove si può osservare che, all'andamento a " campana" di $f(x)$ corrisponde un andamento sigmoidale della funzione integrale $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx$.

Si suggerisce il confronto con il legame tra funzione di distribuzione e funzione di ripartizione per alcune variabili aleatorie continue

Il luogo geometrico

Una richiesta comune ai tre problemi è la verifica della corrispondenza tra il grafico di una funzione assegnata e il luogo geometrico<<versiera>> descritto da un punto ottenuto con una costruzione di tipo geometrico.

Il terzo , in verità, chiede solo la verifica che il punto, costruito geometricamente, appartenga alla curva assegnata ma è evidente l'analogia e il legame con l'altra richiesta.

L' equazione del luogo può essere determinata per via sintetica o con metodi analitici, eventualmente con l'apporto della trigonometria.

Osserviamo che le questioni proposte non richiedono solo conoscenze di procedure e abilità di calcolo ma anche attenzione nella lettura e senso critico

Le prime due tracce, come già osservato, non trascurano la dimensione storica e forniscono un indizio per il risolutore che già abbia avuto modo di conoscere il problema posto da Gaetana Agnesi .

Il confronto tra i diversi modi di porre lo stesso quesito ,o quesiti legati da una forte analogia, induce a una riflessione sul concetto di luogo geometrico ma anche sull'efficacia delle formulazioni di un problema e sulla coerenza delle risposte.

Soluzione geometrica-*La soluzione di Gaetana Agnesi*

La soluzione che compare nelle *Instituzioni analitiche* si adatta facilmente, pur con alcune differenze, al problema del 1997, quello più fedele al problema originale.

Il riferimento opportuno, di cui si parla nel primo problema , è quello che ha l'origine in A, l'asse y coincidente con la retta AC (asse di simmetria), l'asse x coincidente con la tangente in A alla circonferenza

Nella soluzione della stessa autrice, invece, la scelta del riferimento sembra essere dettata da esigenze diverse, precisamente:

- il punto A è l'origine del riferimento
- il segmento AB corrisponde all' ascissa (variabile indipendente)

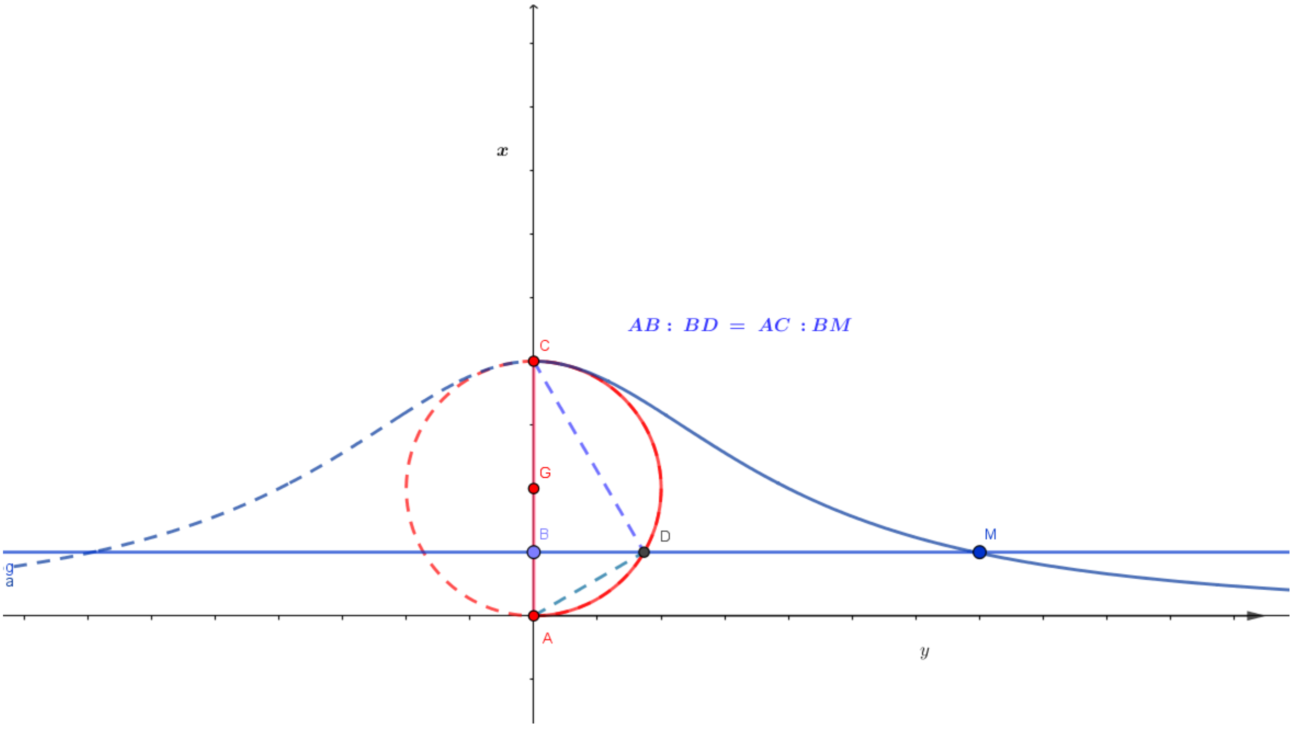
- il segmento BM corrisponde all' ordinata (variabile dipendente)

Per determinare l'equazione del luogo descritto da $M(x; y)$, si conduca da un punto B (diverso da A e da C) del diametro AC, una retta perpendicolare al diametro stesso che incontri la semicirconferenza nel punto D.

La relazione caratteristica del luogo è

AB : BD = AC : BM ovvero $x : \overline{BD} = a : y$

Essendo $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{CB}$ (secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo ADC) si ha $y = a\frac{\sqrt{x(a-x)}}{x}$ (*"equazione alla curva da descriversi che dicesi la versiera"*) , equazione che rappresenta solo il ramo di curva appartenente al primo quadrante,



Poiché la relazione assegnata perde di significato se la retta BD va a coincidere con la tangente in A o con la tangente in C alla circonferenza , si hanno due posizioni limite $B \equiv D \equiv A$ e $B \equiv D \equiv C$, escluse dalla costruzione

Nel primo caso si ha $\lim_{x \to 0^+} y = +\infty$;

Nel secondo caso $\lim_{x \to a^-} y = 0^+$, pertanto si può avere un prolungamento continuo della funzione nel punto $(a; 0)$

Limitando al primo quadrante la costruzione del luogo, si può affermare che ad ogni un valore di x dell'intervallo $]0; a]$ corrisponde uno e un sol valore di y appartenente all'intervallo $[0; +\infty[$.

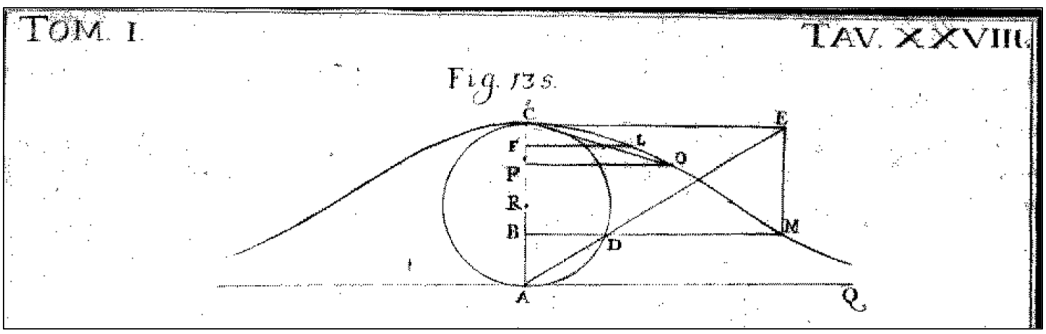
Poiché la simmetria rispetto alla retta AC suggerisce di ripetere la costruzione della curva nel semipiano che contiene l'altro semicircolo l'equazione può essere razionalizzata elevando al quadrato entrambi i termini e semplificata nella forma

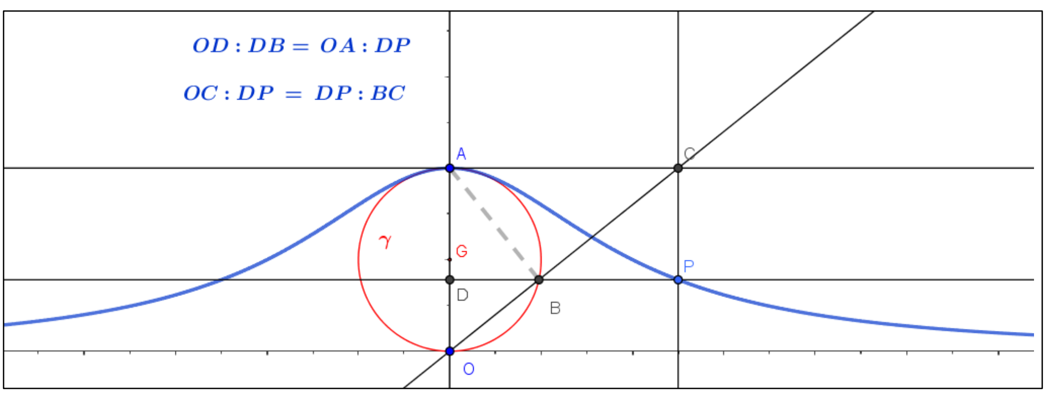
$$y^2 x = a^2(a - x)$$

L'equazione, come era prevedibile, corrisponde a quella assegnata nel problema del 1997, dove sono state scambiate tra di loro le variabili x e y.

La soluzione relativa al problema del 2003

Dopo aver determinato l'equazione della versiera, l'Agnesi ne fornisce una costruzione per punti, come si può osservare nella figura seguente che nelle *Instituzioni analitiche* accompagna la soluzione e che possiamo confrontare con quella ottenuta seguendo le indicazioni del testo del secondo problema





Il problema del 2003 segue un percorso inverso rispetto alla formulazione originale ;

la versiera è definita in modo dinamico, attraverso la sua costruzione "per punti", mentre la relazione caratteristica di Gaetana Agnesi diventa una proprietà da dimostrare (punto2).

Se r coincide con la tangente in O alla circonferenza si ha $B \equiv O$ mentre il punto C e il punto P si allontana verso l'infinito.

Se la retta r coincide con la retta OA si ha $B \equiv C \equiv A$.

Di conseguenza anche il punto P coincide col punto A che pertanto fa parte del luogo.

Escludendo i casi limite, la prima proporzione da dimostrare è analoga a quella originale dell'Agnesi e si deduce dalla similitudine dei triangoli ODB, OAC:

$OD:DB = OA:AC \ \rightarrow \ OD:DB = OA:DP$ essendo AC e DP tra loro congruenti perché lati opposti di un rettangolo.

La seconda relazione si dimostra applicando il primo teorema di Euclide al triangolo OAC e sostituendo ad AC il segmento DP ad esso congruente.

Scegliendo un riferimento in cui la retta OA è l'asse y e la retta tangente in O alla circonferenza è l'asse x l'equazione della curva corrisponderà a una funzione pari asintotica all'asse x, proprio come la funzione assegnata nel punto 2.

A questo punto la soluzione procede in modo analogo al problema precedente, con uno scambio tra le variabili x e y

$$\frac{y}{\sqrt{y(a-y)}} = \frac{a}{x} \ \rightarrow x^2y = a^2(a-y) \rightarrow \ y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$$

L'equazione trovata è ovviamente la forma esplicita dell'equazione del primo problema

La rappresentazione parametrica

La costruzione per punti suggerisce di determinare le equazioni parametriche del luogo in funzione del coefficiente angolare della retta r.

Una generica retta passante per l'origine e non coincidente con l'asse y, ha equazione $y = mx$ e incontra ulteriormente la circonferenza γ , di equazione $x^2 + y^2 - ay = 0$, nel punto B di ascissa $x = \frac{\mathrm{am}}{1+\mathrm{m}^2}$ e ordinata

$y = \frac{\mathrm{am}^2}{1+\mathrm{m}^2}$; incontra altresì, se $m \neq 0$, la retta t in un punto di ascissa

$x = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{m}}$ e ordinata $\mathrm{y} = \mathrm{a}$.

Se la retta r coincide con l'asse y si ha $A \equiv B \equiv C(0;2)$.

Le coordinate del punto P forniscono una rappresentazione parametrica della versiera.

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{m} \\ y = \dfrac{\mathrm{am}^2}{1 + \mathrm{m}^2} \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione il valore di $m = \frac{a}{x}$ si ritrova l'equazione

cartesiana $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$

<u>La versiera nel problema del 2013</u>

La terza traccia sembra distinguersi dalle altre due in quanto non coinvolge esplicitamente

il concetto di luogo geometrico e tanto meno richiede che se ne trovi l'equazione.

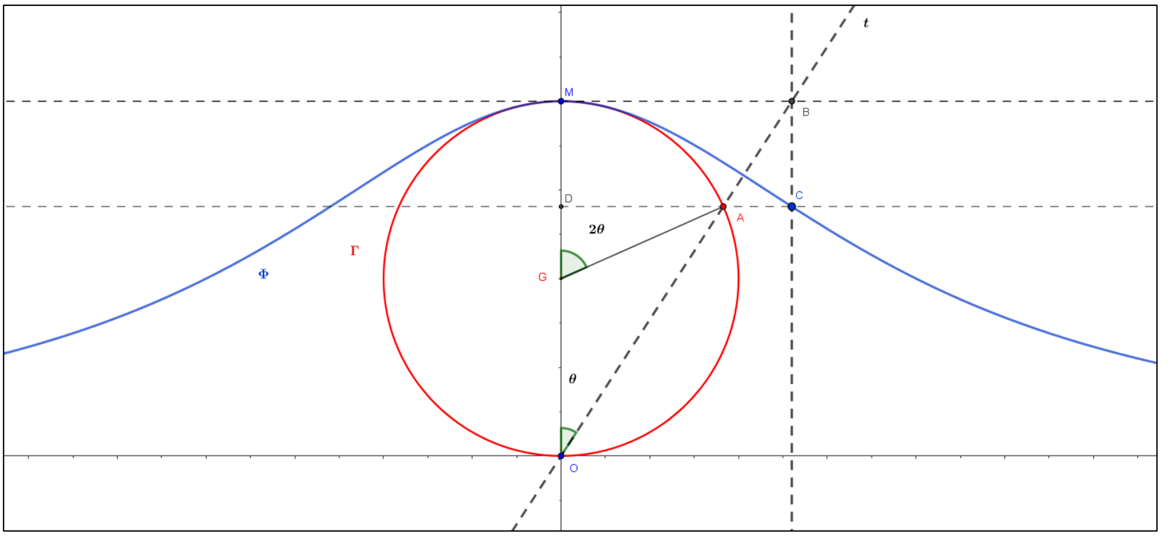
Anche se nel punto 2 si effettuano praticamente le stesse operazioni della ricerca di una rappresentazione parametrica della curva Φ, l'attenzione è spostata sul confronto dei risultati di due problemi: il punto P costruito nel punto 2 appartiene al grafico determinato nel punto 1.

La formulazione del quesito appare meno stereotipata, si richiede riflessione sul quesito posto piuttosto che applicazioni di procedure standard.

L'assenza del vincolo della rappresentazione parametrica e della procedura di eliminazione del parametro allarga la scelta degli approcci risolutivi.

In alternativa al metodo analitico che ripercorre le identiche tappe della rappresentazione parametrica adottata per il problema precedente, proponiamo qualche soluzione in ambito trigonometrico.

Se utilizziamo come parametro l'ampiezza θ dell'angolo $A\hat{O}M$



troviamo, con la condizione $\theta \neq \frac{\pi}{2}$,

$$A(\sin 2\theta\,; 2\cos^2\theta) \quad B(2\tan\theta\ ; 2) \quad C(2\tan\theta\,; 2\cos^2\theta)$$

Sostituendo le coordinate del punto C nell'equazione $y = \frac{8}{4+x^2}$ *si trova* l'identità

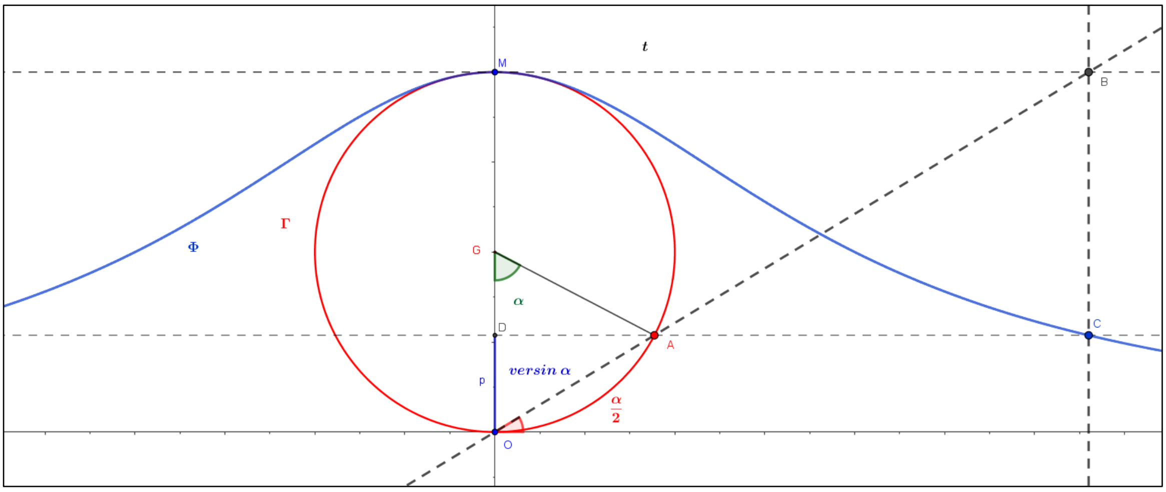
$$2\cos^2\theta = \frac{8}{4+4tan^2\theta} \rightarrow 2\cos^2\theta = 2\frac{cos^2\theta}{cos^2\theta + sin^2\theta} \rightarrow 2\cos^2\theta = 2\cos^2\theta$$

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ la retta t coincide con l'asse x che è l'asintoto della curva e il punto C coincide col suo punto improprio .

Se $\theta = 0$ la retta t coincide con l'asse y e i tre punti coincidono tutti col punto $M(0;2)$

Il legame della versiera con la trigonometria è molto più stretto di quanto non venga solitamente evidenziato.

Ricordando il significato trigonometrico del coefficiente angolare di una retta (vedi figura seguente) possiamo scrivere in forma diversa le equazioni parametriche utilizzate nell'altro problema.



Indicando con α l'ampiezza dell'angolo al centro $O\hat{G}A$, il punto A avrà coordinate $A(\cos\alpha\,;1-\cos\alpha)$, il punto B $\left(\frac{2}{\tan\frac{\alpha}{2}};2\right)$,il punto C $\left(\frac{2}{\tan\frac{\alpha}{2}};1-\cos\alpha\right)$.

L'appartenenza del punto C alla curva Φ si verifica facilmente utilizzando le due identità $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ *e* $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{3}}$

$$1-\cos\alpha = \frac{8}{4+\frac{4}{\tan^2\frac{\alpha}{2}}} \rightarrow 2sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\ \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$$

L'aspetto interessante di questo esempio è l'utilizzo, nell'ordinata del punto C che descrive la curva, del valore $1-\cos\alpha$; nella circonferenza di raggio unitario rappresenta una funzione trigonometrica ormai quasi dimenticata. Il suo nome è senoverso e , secondo alcuni storici della matematica, ad essa si deve il nome "versoria" (corda legata all'estremità di una vela nelle virate) attribuitole inizialmente da Guido Grandi che l'aveva introdotta nella sua *Quadratura Circuli et Hyperbolae.*, divenuto poi "versiera" nelle *Instituzioni matematiche* e infine "*witch of Agnesi*" nella maldestra traduzione in inglese.