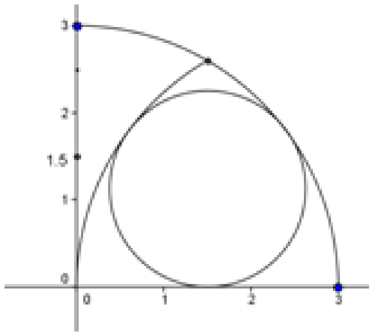
PROBLEMA 2- Ordinamento 2012

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi A(3,0) e B(0,3) e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ *i cui estremi sono il punto A e il punto* $\left(0;\frac{3}{2}\right)$

1. *Sia r la retta tangente in A ad L. si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB*
2. *La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno area* $S(x) = e^{x+5}dx$ *. Si determini il volume di W.*
3. *Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x.*
4. *Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x.*
   Tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri, si determini infine quella che risulta tangente anche all' arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.



Soluzione

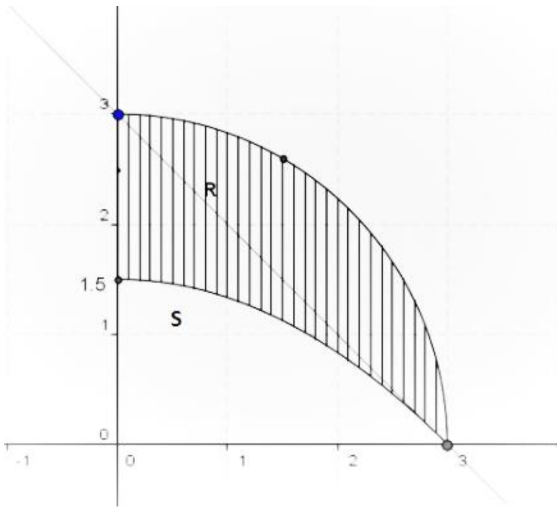
1.Equazione di r : $y = -x + 3$

La regione R è la differenza tra il quadrante di cerchio (area= $\frac{9}{4}\pi$) e l'area della regione S che è uguale a 3 essendo metà di un segmento parabolico di area 6). Pertanto, l'area di R è uguale a $\frac{9}{4}\pi - 3$

Sottraendo l'area **S** dall'area del triangolo AOB si trova una delle due aree richieste

$\frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$**=** $\mathbf{S_1}$ L'altra è l'area del segmento circolare $\boldsymbol{\frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2}}$ **=** $\mathbf{S_2}$

A titolo di verifica osserviamo che S_1+S_2 =R



2.Volume di W = $\int_0^3 S(x)dx = \int_0^3 e^{5-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3}e^{5-3x}\right]_0^3 = \frac{e^5-e^{-4}}{3}$ $\;(metodo\ delle\ "fette")$

3. Volume solido di rotazione : $18\pi - \frac{18}{5}\pi = \frac{72}{5}\pi$, essendo uguale alla differenza tra

il volume di una semisfera di raggio 3 =18π e il volume del solido di rotazione generato

dalla regione S = $\pi\int_0^3\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{3}{2}\right)^2 dx \;=\frac{18}{5}\pi$

4. a Sia $P(x;y)$ il centro di una circonferenza γ e r il suo raggio.

Se γ è tangente all'asse x deve essere $r = |y|$

Se γ è tangente internamente all'arco AB di circonferenza, deve essere soddisfatta la relazione "Distanza dei due centri uguale alla differenza dei raggi"

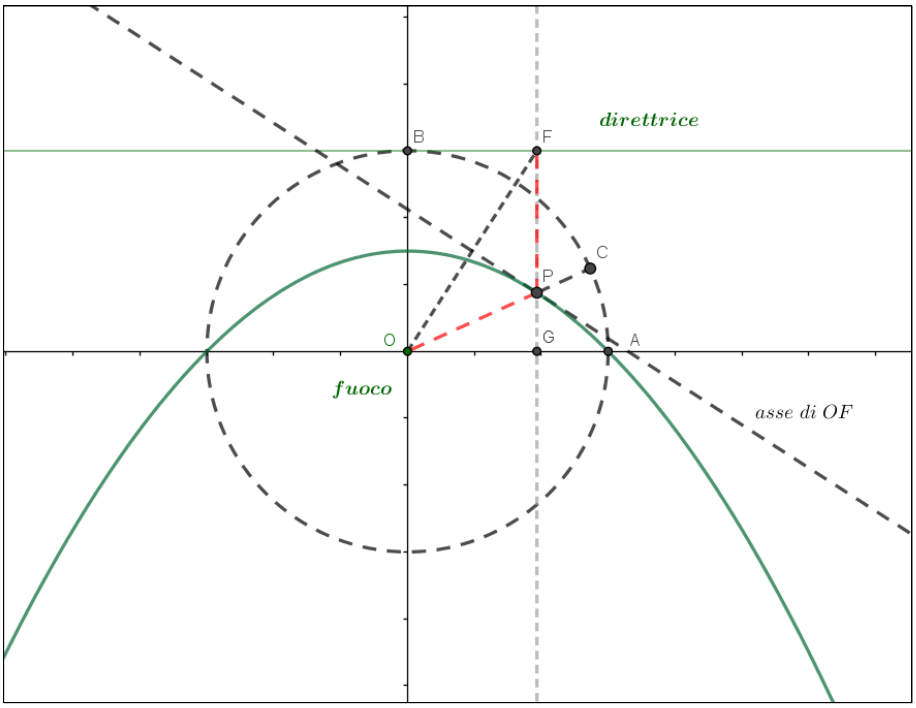
$\overline{PO} = \sqrt{x^2+y^2} = 3 - y \rightarrow x^2 = 9 - 6y$ con le limitazioni $\quad 0 \le x \le 3 \quad 0 \le y \le 3$

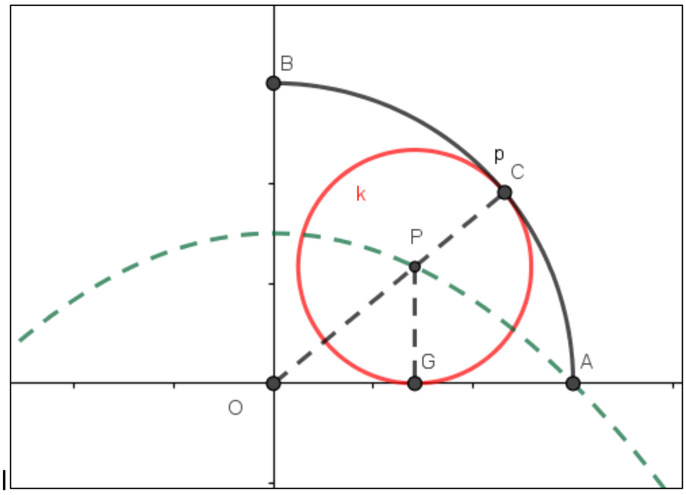
relazione che caratterizza proprio l'arco *L*

Considerazioni di tipo geometrico

La parabola cui appartiene l'arco *L* può essere costruita con riga e compasso nel modo seguente

- Si prenda un punto F della direttrice e lo si congiunga con il fuoco O
- Si tracci l'asse del segmento OF e la perpendicolare condotta da F alla direttrice stessa
- Il punto P comune a alle due rette descrive la parabola in quanto equidistante dal fuoco e dalla direttrice, essendo $\overline{OP} = \overline{PF}$. Se l'ascissa si F rimane entro l'intervallo $[0;3]$, F descrive l'arco *L*





Verifichiamo che, in tal caso, P è anche centro di una circonferenza tangente all'asse x e all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3 (internamente)

Sia C il punto in cui l'arco AB incontra il prolungamento del segmento OP.

Poiché $\overline{FG}$= $\overline{OC}$ sarà anche $\overline{PG}$= $\overline{PC}$ in quanto differenza di segmenti congruenti.

La circonferenza di centro P e raggio avente lunghezza uguale a $\overline{PG}$ sarà tangente all'asse x ma anche all'arco AB (internamente) in quanto la distanza $\overline{OP}$ fra i due centri è uguale alla differenza $\overline{PF}$ dei due raggi.

4 b. Per determinare la circonferenza di centro $P(x; y)$, tangente internamente anche all'arco di centro A e raggio3 aggiungiamo la condizione $\overline{PA} = \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 3-y$ che , essendo il secondo membro non negativo, si può razionalizzare nelle forma $x^2-6x=-6y$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} x^2 = 9-6y \\ x^2-6x=-6y \end{cases}$ si trova P $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{9}{8} \end{cases}$

Equazione della circonferenza $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{9}{8}\right)^2 = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \rightarrow 4x^2+4y^2-12x-9y+9=0$

Considerazioni di tipo geometrico

Supponiamo di aver costruito la circonferenza k, avente il centro in un punto dell'arco L

La simmetria rispetto alla retta $x = \frac{3}{2}$, trasforma l'arco p di circonferenza nell'arco q e il punto di tangenza C nel punto C'.

La circonferenza k risulta tangente a entrambi gli archi se e solo se si trasforma in sé stessa nella suddetta simmetria, cioè se il suo centro appartiene alla retta $x = \frac{3}{2}$.

Sostituendo il valore $x = \frac{3}{2}$ nell'equazione del luogo L, troviamo le coordinate del centro P $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{9}{8} \end{cases}$