Anno Scolastico 1990-'91 (sessione ordinaria) Primo quesito

In un piano cartesiano Oxy si consideri il punto $A(2x; 0)$.

Si trovi il luogo L del punto $B(x; y)$ tale che il triangolo OAB abbia perimetro $2p$ e si determini l'area della regione finita di piano delimitata dal luogo stesso.

Se Bo è il punto di L del primo quadrante la cui ascissa è p/4 ed A_0 il terzo vertice del triangolo relativo, si calcoli l'area del triangolo OA_0B_0. Si individuino inoltre le altre sette posizioni di B tali che il triangolo OAB sia equivalente ad OA_0B_0

A) Ricerca del luogo geometrico

Il problema chiede sostanzialmente di determinare, in un riferimento cartesiano Oxy, un triangolo isoscele di perimetro assegnato 2p, avente per base un segmento OA appartenente all'asse delle x.

Le coordinate del terzo vertice B, che può appartenere a ciascuno dei quattro quadranti, devono soddisfare la condizione

$$|x| + \sqrt{x^2 + y^2} = p$$

Poiché l'equazione si muta in se stessa se si applica

- una simmetria rispetto all'asse x
- una simmetria rispetto all'asse y
- una simmetria rispetto all'origine O

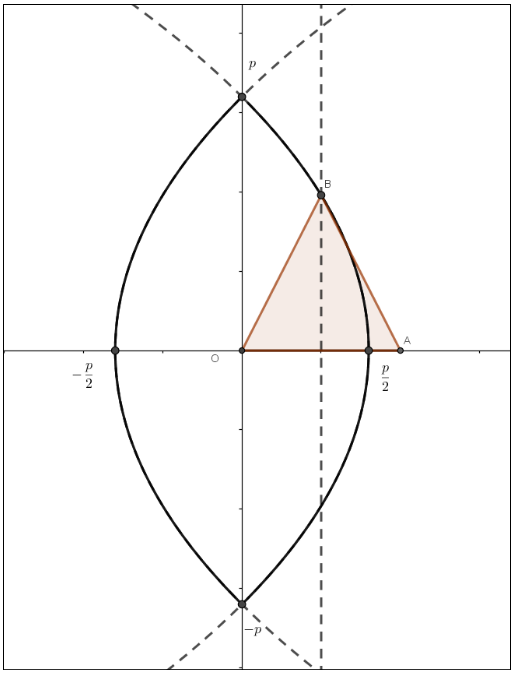
possiamo affermare che il luogo geometrico descritto dal punto B ammette due assi e un centro di simmetria, come del resto suggerisce l'intuizione geometrica.

Scritta l'equazione nella forma $\sqrt{x^2 + y^2} = p - |x|$, per riconoscere la natura della curva rappresentata, eliminiamo il radicale elevando al quadrato entrambi i membri con la condizione $p - |x| \geq 0$.

Grazie alla simmetria rispetto all'asse y , possiamo considerare inizialmente solo il caso in cui sia $x \geq 0$, ottenendo l'equazione

$$y^2 = p^2 - 2px \quad \text{con la condizione } 0 \leq x \leq p$$

Il grafico corrispondente è un arco di parabola avente per asse l'asse delle x, il vertice nel punto di coordinate $\left(\frac{p}{2};0\right)$, concavità rivolta verso sinistra. Gli estremi dell'arco hanno coordinate$(0;p)$ e $(0;-p)$ rispettivamente



Il luogo L è costituto dall'unione del suddetto arco col suo simmetrico rispetto all'asse y.

L'area racchiusa è uguale a $\frac{4}{3}p^2$, ricordando che ciascun segmento parabolico è $\frac{2}{3}$del rispettivo rettangolo circoscritto (Teorema di Archimede). Applicando il calcolo integrale:

$$4\int_0^p \left(-\frac{1}{2p}y^2+\frac{p}{2}\right)dy =$$

$$4\left[-\frac{1}{6p}y^3+\frac{p}{2}y\right]_0^p = \frac{4}{3}p^2$$

B)Area del triangolo OA_0B_0

In generale, se il punto B di L appartiene al primo quadrante e quindi ha coordinate (x,y) entrambe positive, l'area del triangolo OAB sarà uguale al loro prodotto, essendo $2x$ la misura della base e y la misura della relativa altezza.

Il punto Bo, del primo quadrante, appartenente al luogo e avente ascissa $\frac{p}{4}$, avrà coordinate $(\frac{p}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}p)$, il corrispondente punto A_0 avrà coordinate $\left(\frac{p}{2};0\right)$,l'area del triangolo OA_0B_0sarà uguale a $\frac{\sqrt{2}}{8}p^2$.

Viceversa, se è nota l'area del triangolo e pari a $\frac{\sqrt{2}}{8}p^2$, i punti di L corrispondenti devono essere soluzioni del sistema $\begin{cases} |x|+\sqrt{x^2+y^2}=p \\ |xy| = \frac{\sqrt{2}}{8}p^2 \end{cases}$

Sfruttando le simmetrie di L, possiamo determinare le soluzioni del sistema corrispondenti a punti del primo quadrante e poi considerare i loro simmetrici rispetto all'asse x, all'origine e all' asse y.

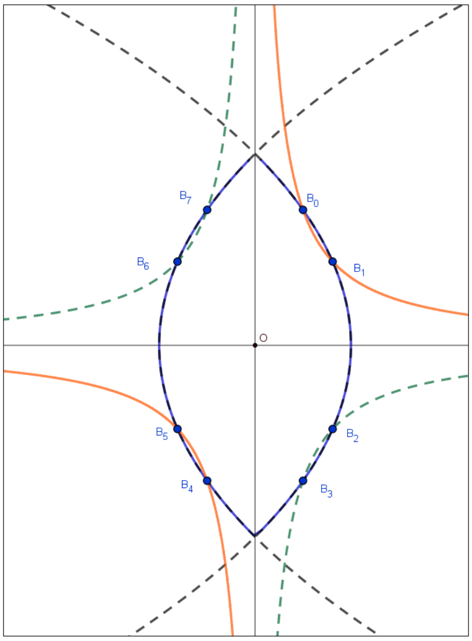
$$\begin{cases} y^2 = p^2 - 2px \\ xy = \dfrac{\sqrt{2}}{8}p^2 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Poiché l'equazione risolvente $64x^3-32px^2+p^3=0$ ammette sicuramente la soluzione $x = \frac{p}{4}$ corrispondente punto Bo, il polinomio $64x^3-32px^2+p^3$

è divisibile per $(x - \frac{p}{4})$ e può essere scomposto, utilizzando la regola di Ruffini , nel prodotto

$$\left(x - \frac{p}{4}\right)(64x^2 - 16px - 4p^2)$$

L'equazione che si ottiene annullando il polinomio di secondo grado ammette le due soluzioni



$x=\frac{1-\sqrt{5}}{8}p$ non accettabile perché negativa $x=\frac{1+\sqrt{5}}{8}p$ accettabile

Gli otto punti richiesti sono pertanto

$B_0\left(\frac{p}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}p\right)$ $B_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{8}p\ ;\frac{p}{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$

$B_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{8}p\ ;-\frac{p}{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$ $B_3\left(\frac{p}{4};-\frac{\sqrt{2}}{2}p\right)$

$B_4\left(-\frac{p}{4};-\frac{\sqrt{2}}{2}p\right)$ $B_5\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{8}p\ ;-\frac{p}{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$

$B_6\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{8}p\ ;+\frac{p}{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$ $B_7\left(-\frac{p}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}p\right)$

N.B Il radicale doppio $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ *può essere scritto nella forma* $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$