Quesito 7 – PNI 2007

Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 + 1$ nel punto $P(1,2)$.

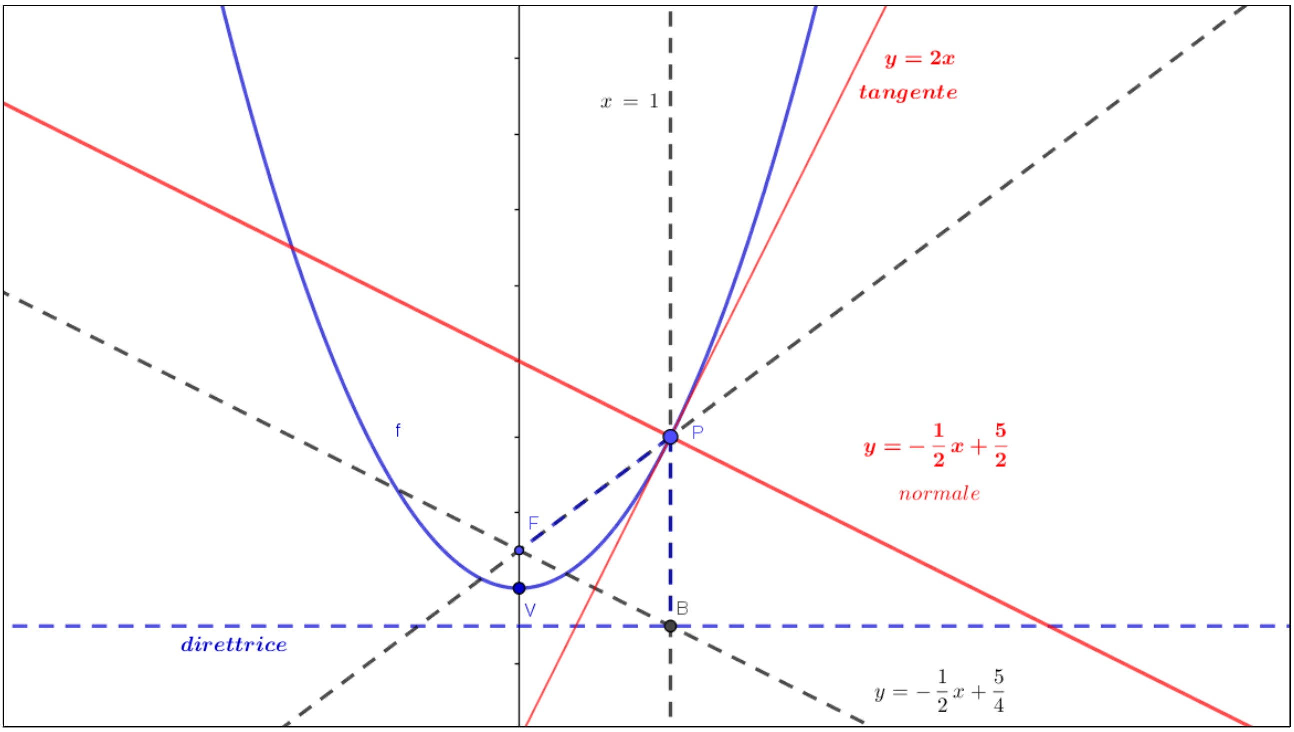
Soluzione

Due curve sono tangenti in un punto P se passano entrambe per P ed hanno ivi la medesima tangente e, quindi la medesima normale. I luogo richiesto , pertanto, la retta perpendicolare alla tangente alla parabola nel punto assegnato.

Il coefficiente angolare di quest'ultima , calcolato per via elementare oppure sfruttando il concetto di derivata, è uguale a 2, pertanto l'equazione della retta normale è $y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Soluzione geometrica

Si parte dalla costruzione della retta tangente e della normale alla parabola come bisettrici dell'angolo di due rette uscenti dal punto P: la congiungente il fuoco F e la perpendicolare alla direttrice, come illustrato nella figura seguente



Essendo $\overline{PF} = \overline{PB}$ *il* triangolo PBF è isoscele, la tangente alla parabola in P è bisettrice dell'angolo in P e altezza relativa al lato BF, pertanto la retta BF è parallela alla normale, il cui coefficiente angolare si determina facilmente.

Infatti, il fuoco F ha coordinate $\left(0;\frac{5}{4}\right)$ e il punto B , appartenente alla direttrice che ha equazione $y = \frac{3}{4}$ e alla retta $x = 1$, ha coordinate $\left(1;\frac{3}{4}\right)$, pertanto $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2}$