8. Supponiamo che l'intervallo di tempo t(in anni) tra due cadute di fulmini in un'area di 100 m^2 sia dato da una variabile casuale continua con funzione di ripartizione:

$P(t \leq z) = \int_0^z 0{,}01e^{-0{,}01s}$ ds

a) Si calcoli la probabilità che, in tale area, i prossimi due fulmini cadano entro non più di 200 anni l'uno dall'altro
b) Si determini qual è il minimo numero di anni z , tale che sia almeno del 95% la probabilità che i prossimi due fulmini cadano in tale area entro non più di z anni l'uno dall'altro

Soluzione

Le informazioni che fornisce il testo devono avere questa chiave di lettura:

alla variabile casuale continua t , che indica l'intervallo di tempo tra due cadute di fulmini, è associata una funzione di densità di probabilità

$$f(s) = \begin{cases} 0{,}01e^{-0{,}01s} & 0 \leq s \leq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$$

tale che la probabilità che t cada nell'intervallo $[a, b\ ]$ è

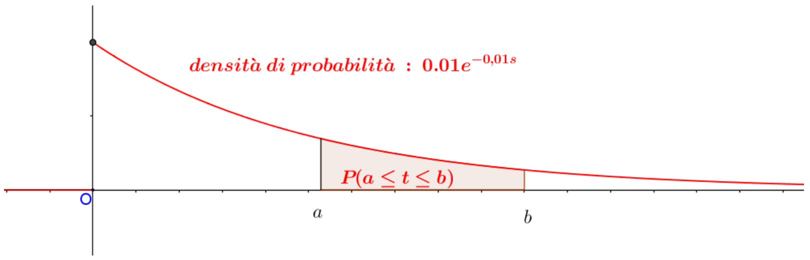
$$P(a \leq t \leq b) = \int_a^b f(s)ds$$

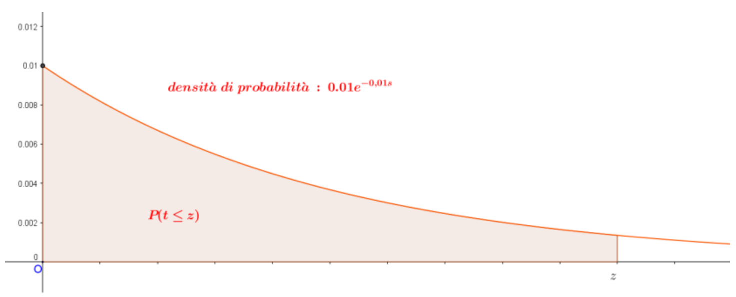
quindi

la probabilità che t assuma un valore non superiore a un numero reale positivo z è

$$P(t \leq z) = \int_0^z 0{,}01e^{-0{,}01s}\ \text{ds}$$

Geometricamente la probabilità associata a un intervallo è rappresentata dall'area sottesa dal grafico di $f(s)$ sull'intervallo specificato





E' evidente , pertanto , che per rispondere al punto a) del quesito dobbiamo calcolare

$P(t \leq 200) = \int_0^{200} 0{,}01e^{0{,}01s}$ ds = $[-e^{-0{,}01s}]_0^{200} = 1 - \mathrm{e}^{-2} \cong 86\%$

punto b)

Imponiamo $\int_0^z 0{,}01e^{-0{,}01s}\ \mathrm{ds}\ \geq 0{,}95 \rightarrow$

= $[-e^{-0{,}01s}]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}01\mathrm{z}} \geq 0{,}95 \rightarrow \mathrm{e}^{-0{,}01\mathrm{z}} \leq 0{,}05 \rightarrow$

$$-0{,}01\mathrm{z} \leq \ln 0{,}5 \rightarrow \mathrm{z} \geq -\frac{\ln 0{,}05}{0{,}01} \cong 299{,}57$$

Il minimo numero di anni z , tale che sia almeno del 95% la probabilità che i prossimi due fulmini cadano in tale area entro non più di z anni l'uno dall'altro è circa 300 anni