Anno Scolastico 1989-'90 Secondo quesito

Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla retta $y = \frac{37}{12}$ *e passanti per A(0;* $\frac{19}{12}$*) ed il luogo dei centri delle circonferenze tangenti alla circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$

E passanti per $B(2; 2)$.

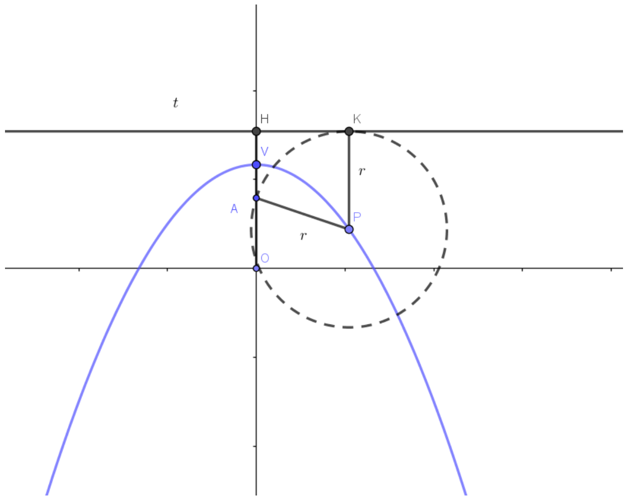
Calcolare quindi l'area della parte di piano racchiusa dalle due curve.

Soluzione

Equazione del primo luogo L_1

Il centro di una circonferenza passante per A e tangente a una retta t, ha una distanza pari al raggio, sia dal punto che dalla retta.

Si deve pertanto determinare il luogo dei punti equidistanti da A e da t che sarà necessariamente una parabola avente A per fuoco e t come direttrice.



Se $P(x, y)$ è un generico punto del piano, basta tradurre in linguaggio algebrico la relazione

$\overline{PA} = \overline{PH} \rightarrow \overline{PA}^2 = \overline{PH}^2$: $x^2 + \left(y - \frac{19}{12}\right)^2 = \left(y - \frac{37}{12}\right)^2$

che, dopo i necessari calcoli, diventa

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}$$

Allo stesso risultato si perviene a partire da alcune proprietà della parabola:

- l'asse di simmetria coincide con la perpendicolare condotta dal fuoco alla direttrice, in questo caso l0asse delle y
- il vertice è il punto medio del segmento AH, quindi il punto $V\left(0, \frac{7}{3}\right)$

- l'equazione della parabola si può scrivere nella forma $y = ax^2 + \frac{7}{3}$
- il valore di a si può determinare dalla relazione $|a| = \frac{1}{2\overline{AH}} = \frac{1}{3}$, assegnando poi un valore negativo poiché il fuoco si trova al di sotto del vertice (la parabola volge la concavità verso il basso)

Un approccio diretto alla ricerca delle equazioni parametriche del luogo presenterebbe una maggiore complessità dei calcoli

Sia $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ l'equazione di una generica circonferenza e sia $C(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$ il suo centro ed $r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ il suo raggio

Imponendo le condizioni

$\left(\frac{19}{12}\right)^2 + b(\frac{19}{12}) + c = 0$ passaggio per A

$\left|-\frac{b}{2} - \frac{37}{12}\right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ condizione di tangenza

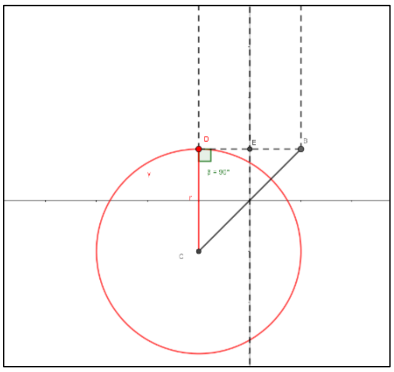
$a = -2x$ relazione tra l'ascissa del centro e i parametri della circonferenza

$b = -2y$ relazione tra l'ordinata del centro e i parametri della circonferenza

troviamo 4 equazioni che legano le 5 variabili x, y, a, b, c *tra le quali* è possibile eliminare i 3 parametri a, b e c , lasciando un'unica relazione tra x e y (Equazione del luogo),

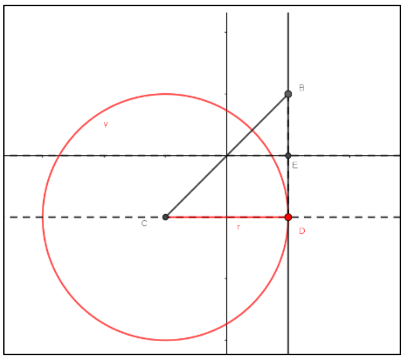
Equazione del secondo luogo L_2

Ricordiamo che due circonferenze sono tangenti esternamente se e solo se la distanza dei due centri è uguale alla somma dei raggi, sono tangenti internamente se la distanza dei due centri è uguale alla differenza dei raggi.



Si consideri la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$, di centro $C(-2, -2)$ e raggio r= 4, e il punto $B(2; 2)$ che è ad essa esterno. Se una seconda circonferenza c è tangente a γ e passa per B le due circonferenze possono essere tangenti esternamente o internamente, in quest'ultimo caso, la circonferenza γ si troverà all'interno.

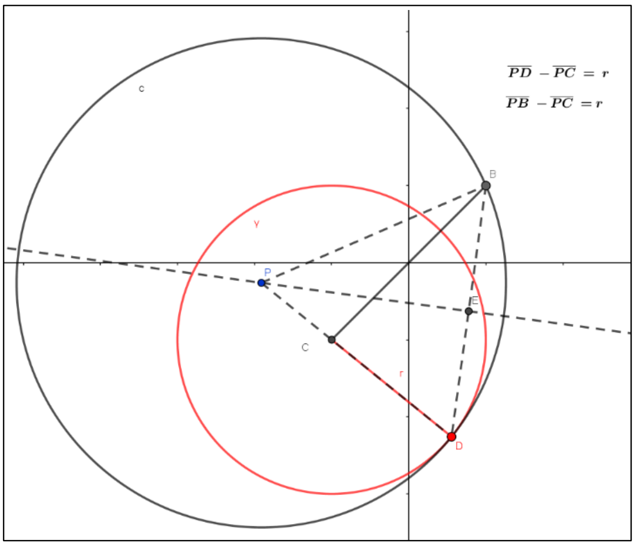
Una semiretta p uscente da C , incontra la circonferenza γ in un punto D e incontra anche la retta s asse del segmento BD in un punto P, tranne che per due posizioni limite in cui p e s sono parallele. Precisamente, se D coincide con il punto di tangenza di c con la retta $x = 2$ o con la retta $y = 2$

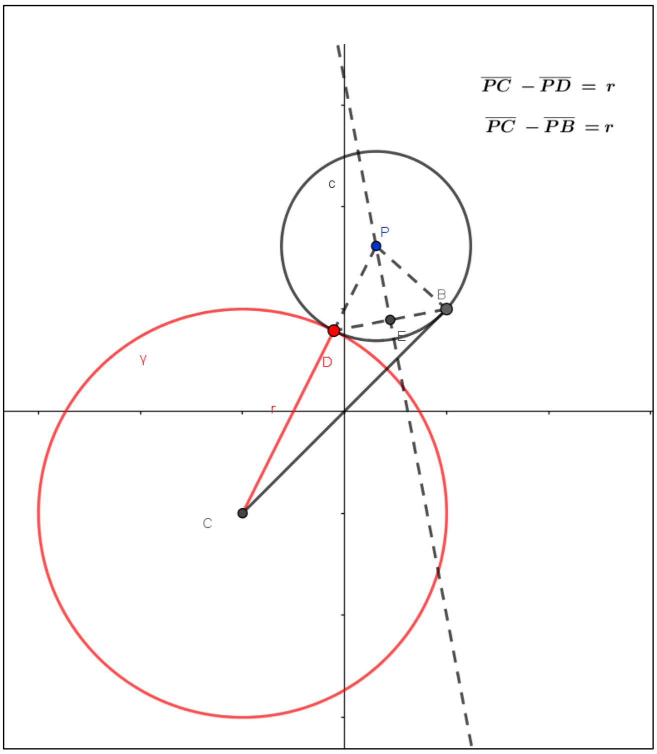


(le due tangenti a c condotte da B) la semiretta p sarà perpendicolare a CD e quindi parallela al suo asse.

In questi casi il punto P si allontana all'infinito nella direzione dell'asse y o dell'asse x (punti impropri)

Se la retta DC e l'asse del segmento BD si incontrano in un punto P, la circonferenza c di centro P passante per B passa anche per D, in quanto $\overline{PD}$=$\overline{PB}$, ed è ivi tangente a γ essendo $\overline{PC} = \overline{PD} - \overline{CD}$ (tangenti internamente) oppure $\overline{PC} = \overline{PD} + \overline{CD}$ (tangenti esternamente) , ricordando che $\overline{CD} = r$.





Al variare della posizione del punto D il punto P descrive una curva caratterizzata dalla relazione
| $\overline{PC}$-$\overline{PD}$ | =4 ovvero | $\overline{PC}$-$\overline{PB}$ | =4
In linguaggio algebrico

$$\left| \sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2} - \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} \right| = 4$$

Il luogo L_2 ,pertanto, è un'iperbole aventi i fuochi coincidenti con i punti C e B, rispettivamente, e semiasse trasverso $a = 2$ .L'equazione evidenzia una simmetria rispetto all'origine O che rappresenta, quindi, il centro dell'iperbole (punto medio del segmento congiungente i due fuochi,.

La retta CB, di equazione $y = x$, è l'asse trasverso, l'altro asse avrà equazione $y = -x$, gli asintoti sono gli assi cartesiani in accordo con quanto abbiamo osservato sui casi limite.

Sviluppando i calcoli, l'equazione si riduce a $xy = 2$, equazione di un'iperbole equilatera avente gli asintoti coincidenti con gli assi cartesiani del tipo, quindi, $xy = \frac{a^2}{2}$

Area compresa tra i due luoghi

La parabola incontra l'iperbole in tre punti, P e Q nel primo quadrante e S nel terzo.

L'area racchiusa è quella compresa tra i due archi di estremi P e Q

Per calcolare determinare i punti comuni si deve risolvere il sistema $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3} \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$

L'equazione risolvente è l'equazione di terzo grado $x^3 - 7x + 6 = 0$ le cui radici si determinano facilmente scomponendo in fattori il polinomio al primo membro

$$x^3 - 7x + 6 = x^3 - x - 6x + 6 = (x-1)(x^2 + x + 1 - 6) = (x-1)(x^2 + x - 6) =$$

$$(x-1)(x-2)(x+3)$$

$L'equazione\ (x-1)(x-2)(x+3) = 0\ \ ha\ quindi\ tre\ radici\ razionali\ \ intere\quad x = 1\quad x = 2\quad x = -3$

I punti comuni sono, pertanto, $Q(1,2)\quad R(2,1)\quad S(-3, -\frac{2}{3})$

L'area compresa tra i due luoghi è uguale a $A = \int_1^2 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3} - \frac{2}{x}\right) = \frac{14}{9} - 2\ln 2$