GEOMETRIA

(traduzione di Biagio Scognamiglio da Encyclopédie)

È la scienza delle proprietà dell'estensione, in quanto la si consideri come semplicemente estesa e figurata.

Questa parola è formata da due parole greche, γῆ o γαῖα, *terra*, e μέτρον, *misura*. Questa etimologia sembra indicarci ciò che ha dato origine alla *Geometria*: imperfetta e oscura nella sua origine come tutte le altre scienze, ha avuto inizio come a tentoni, per tentativi e errori, con misurazioni e operazioni grossolane, e si è innalzata a poco a poco a questo sublime grado di esattezza in cui la vediamo.

Breve storia della Geometria. Appare che la *Geometria*, come la maggior parte delle altre scienze, sia nata in Egitto, che sembra essere stato la culla delle conoscenze umane o, per parlare con maggiore esattezza, che fra tutti i paesi che noi conosciamo è quello in cui le Scienze sembrano essere state coltivate più anticamente. Secondo Erodoto e Strabone, gli Egiziani, non essendo in grado di riconoscere i confini dei loro possedimenti confusi dalle inondazioni del Nilo, inventarono l'arte di misurare e dividere le terre, per distinguere le loro in base alla conformazione che esse avevano e all'estensione delle loro superfici. Tale fu, si è soliti dire, la prima aurora della *Geometria*. Giuseppe, storico infervorato per la sua nazione, ne attribuisce l'invenzione agli Ebrei; altri la attribuiscono a Mercurio. Rispondano o meno al vero queste cose, sembra certo che, quando gli uomini hanno cominciato a possedere delle terre, e a vivere sotto leggi differenti, non hanno fatto trascorrere molto tempo prima di compiere su di esse qualche operazione per misurarle, sia in lunghezza che in superficie, per intero o in parti: ecco l'origine della *Geometria*.

Dall'Egitto passò in Grecia. Si sostiene che vi sia stata importata da Talete. Questi non si accontentò di insegnare ai Greci ciò che aveva appreso dagli Egiziani, ma fece delle aggiunte e arricchì questa scienza con molti enunciati. Dopo di lui venne Pitagora, che coltivò anch'egli la *Geometria* con successo. A lui è attribuito il famoso enunciato del quadrato dell'ipotenusa. Si veda la voce HYPOTHÉNUSE. Si tramanda che fu così rapito da questa scoperta che per la gioia sacrificò cento buoi alle Muse. Sembra, scrive un moderno autore, che fossero buoi di cera o di pasta, perché Pitagora era contro l'uccisione di animali a causa della sua teoria della metempsicosi, che (per un filosofo pagano) non era l'opinione più assurda. Si veda la voce MÉTEMPSYCOSE. Ma è fin troppo evidente che il fatto non risponde al vero e ciò ci dispensa dallo spiegarlo. Dopo Pitagora, i filosofi e le scuole che essi formarono continuarono a coltivare lo studio della *Geometria*. Plutarco tramanda che Anassagora di Clazomene si dedicò al problema della quadratura del cerchio nella prigione ove era stato rinchiuso e che compose anche un'opera sull'argomento. Anassagora era stato accusato di empietà per aver detto che gli astri erano materia, e sarebbe stato condannato a morte, se Pericle non gli avesse salvato la vita. Per inciso, questo esempio dimostra che non da oggi i Filosofi sono perseguitati per aver avuto ragione, e che i sacerdoti greci erano abili quanto certi teologi moderni a far assurgere a dogmi religiosi cose che non lo erano affatto.

Platone, che tributò a Anassagora grandi elogi per la sua perizia in *Geometria*, ebbe anch'egli grandi meriti nel campo. Si sa che egli diede una soluzione assai semplice del problema della duplicazione del cubo. Si veda la voce DUPLICATION. Si sa anche che questo grande filosofo chiamava Dio *l'eterno geometra* (idea veramente giusta e degna dell'Essere supremo) e che considerava la *Geometria* così necessaria per lo studio della Filosofia da avere scritto sulla porta della sua scuola queste parole memorabili: *"Non entri qui nessuno che sia ignorante di Geometria"*. Fra Anassagora e Platone si deve collocare Ippocrate di Chio, che merita di essere menzionato per la sua famosa quadratura della lunula. Si veda la voce LUNULE. Cramer Feu, professore di Filosofia a

Ginevra, nelle memorie dell'accademia prussiana delle Scienze per l'anno 1748 ci ha dato un'ottima dissertazione su questo geometra. Vi si legge che Ippocrate durante un suo viaggio ad Atene, avendo avuto occasione di ascoltare i filosofi, si appassionò per la *Geometria* al punto che vi fece dei progressi ammirevoli; si aggiunge che questo studio sviluppò il suo talento e per tutto il resto aveva lo spirito lento e bloccato. Si racconta ciò anche di Clavio, buon geometra del Seicento. In tutto ciò non v'è niente di sorprendente, ma il colmo dell'inettitudine è farne una regola. Si veda la voce GÉOMETRE.

Euclide, che visse circa cinquant'anni dopo Platone, ed è da non confondere con Euclide di Megara contemporaneo di questo filosofo, raccolse ciò che i suoi predecessori avevano trovato sugli elementi della *Geometria*; egli ne compose l'opera che di lui abbiamo e che molti autori moderni considerano la migliore nel suo genere. Nei suoi *Elementi* non considera se non le proprietà della linea retta e del cerchio e quelle delle superfici e dei solidi rettilinei o circolari; nondimeno non è affatto vero che fino al tempo di Euclide non fosse conosciuta una curva diversa dal cerchio: i Geometri si erano già accorti che resecando un cono in differenti modi si formavano curve differenti dal cerchio e le chiamarono *sezioni coniche*. Si vedano le voci CONIQUE e SECTION. Le differenti proprietà di queste curve, che parecchi matematici scoprirono in seguito, furono raccolte in otto libri da Apollonio di Pergamo, vissuto circa 250 anni a. C. Si veda la voce APOLLONIEN. Fu lui, come si ritiene, che dette alle tre sezioni coniche i loro nomi attuali, *parabola, ellissi* e *iperbole*, e se ne possono vedere le ragioni alle rispettive voci. Quasi negli stessi tempi di Apollonio fiorì Archimede, di cui abbiamo opere molto belle su sfera e cilindro, conoidi e sferoidi, sulla quadratura del cerchio che egli trovò mediante un'approssimazione assai semplice e ingegnosa (si veda la voce QUADRATURE) e su quella della parabola che riuscì a determinare con esattezza. Di lui abbiamo anche un trattato sulla spirale, che può essere considerato un capolavoro di sagacia e penetrazione. Le dimostrazioni che dà in quest'opera, per quanto assai esatte, sono così difficili da abbracciare che un dotto matematico moderno, Bouillaud, ammette di non averle mai ben comprese, e che un matematico assai valente, il nostro illustre Viete, le ha sospettate ingiustamente di paralogismo, non avendole ben comprese. Si veda la *prefazione all'analisi infinitesimale* di de l'Hôpital. In questa prefazione, dovuta a de Fontenelle, sono riportati i due passi di Bouillaud e Viete che attestano quanto abbiamo qui affermato. Si devono ancora ad Archimede altri scritti non meno degni di ammirazione, che riguardano la Meccanica più che la *Geometria*, sull'equipollenza dei pesi, su ciò che poggia sui liquidi, e qualche altro libro ancora che non è il caso di menzionare qui.

Noi parliamo in questa storia soltanto dei Geometri di cui ci restano degli scritti risparmiati dal passare del tempo, perché se dovessimo ricordare i nomi di tutti coloro che nell'antichità si sono distinti in *Geometria,* la lista sarebbe troppo lunga; bisognerebbe fare menzione di Eudosso di Cnido, Archita di Taranto, Filolao, Eratostene, Aristarco di Samo, Dinostrato così conosciuto per la sua quadratrice (si veda la voce QUADRATRICE), di suo fratello Menecmo discepolo di Platone, dei due Aristei, il vecchio e il giovane, di Conone, Trasideo, Nicotele, Leo, Teudio, Ermotimo, Nicomede inventore della concoide (si veda la voce CONCHOIDE) e un po' più giovane di Archimede e Apollonio, e molti altri ancora.

I Greci continuarono a coltivare la Filosofia, la *Geometria* e le Lettere, anche dopo essere stati soggiogati dai Romani. La *Geometria* e le Scienze in generale non furono tenute in gran conto presso quest'ultimo popolo, che pensava soltanto a soggiogare e governare il mondo intero e non cominciò a coltivare l'eloquenza stessa se non verso la fine dell'età repubblicana. Si è visto nella voce ERUDITION con quale leggerezza Cicerone parli di Archimede, che pure non gli era affatto inferiore. Forse è fare qualche torto a un genio sublime come Archimede metterlo accanto a un bello spirito come quel Cicerone che nelle materie filosofiche da lui trattate non ha fatto altro se non esporre in lunghi e imbellettati discorsi le chimere pensate da altri. A Roma si era così ignoranti in Matematica che comunemente si dava il nome di *matematici*, come si vede in Tacito, a tutti quelli che si arrischiavano nella divinazione, sebbene le chimere della divinazione e dell'astrologia siano ancora più distanti dalla Matematica di quanto lo sia la pietra filosofale dalla Chimica. Lo stesso Tacito, uno dei più grandi spiriti fra gli scrittori di ogni tempo, ci dà con le sue opere una prova dell'ignoranza dei Romani nelle più elementari e semplici questioni di *Geometria* e Astronomia. Nella vita di Agricola, nel fare la descrizione dell'Inghilterra, scrive che verso l'estremità settentrionale di questa isola in piena estate i giorni non hanno quasi ore notturne; ed ecco la ragione che ne adduce: *"scilicet extrema et plana terrarum humili umbra non erigunt tenebras, infraque coelum et sidera nox cadit"*. Noi non ci cimenteremo come i commentatori di Tacito nel dare un senso a ciò che non ne ha affatto; ci accontenteremo di avere mostrato con questo esempio che la smania di diffondere una falsa conoscenza e di parlare di ciò che non si capisce è assai antica. Un traduttore di Tacito asserisce che questo storico in questo passo considera la Terra come *una sfera la cui base è circondata dall'acqua*, e via dicendo. Noi non sappiamo che cosa sia la base di una sfera!

Se i Romani coltivarono poco la *Geometria* nei tempi più fiorenti dell'età repubblicana, non c'è da sorprendersi del fatto che l'abbiano coltivata ancor meno del periodo della decadenza imperiale. Così non fu per i Greci, che ebbero valenti geometri perfino dopo l'avvento dell'era cristiana e molto tempo dopo la traslazione dell'impero. Tolomeo, grande astronomo e per conseguenza grande geometra, dato che non si può essere l'uno senza l'altro, visse sotto Marco Aurelio; e si possono vedere sotto la voce ASTRONOMIE i nomi di molti altri. Abbiamo ancora le opere di

Pappo di Alessandria, che visse all'epoca di Teodosio; Eutocio di Ascalona, vissuto dopo di lui intorno all'anno 540 dell'era cristiana, ci ha dato un commentario sulla misurazione del cerchio di Archimede; Proclo, che visse sotto l'impero di Anastasio fra il quinto e il sesto secolo, dimostrò i teoremi di Euclide e il suo commentario su questo autore è giunto fino a noi. Questo Proclo è ancor più famoso per gli specchi (veri o supposti) di cui si sarebbe servito per incendiare la flotta di Vitaliano all'assedio di Costantinopoli. Si vedano le voci ARDENT e MIROIR. Fra Eutocio e Pappo sembra che si debba collocare Diocle, noto per la cissoide (si veda la voce CISSOÏDE), ma del quale non si conosce altro che il nome, non sapendo con precisione in quale epoca sia vissuto.

La profonda ignoranza che regnava sulla superficie della Terra e soprattutto in Occidente, dopo la distruzione dell'impero ad opera dei barbari, nocque alla *Geometria* come a tutte le altre conoscenze; non si trovano quasi più né presso i Latini e nemmeno presso i Greci uomini versati in questo argomento; ve ne furono soltanto alcuni che venivano chiamati sapienti, ma solo perché erano meno ignoranti degli altri, e alcuni di loro, come Gerberto, furono ritenuti provvisti di virtù magiche; ma se essi ebbero qualche conoscenza delle scoperte dei loro predecessori, niente vi aggiunsero, almeno quanto alla *Geometria*; noi non conosciamo alcun teorema importante di cui questa scienza sia loro debitrice; allora il poco di *Geometria* che si voleva sapere lo si studiava principalmente in rapporto all'Astronomia e si studiava l'Astronomia in rapporto al calendario e al computo ecclesiastico, così lo studio della Geometria non si spingeva affatto lontano. Si possono vedere alla voce ASTRONOMIE i nomi dei principali matematici dei secoli dell'ignoranza. Ce n'è uno che non dobbiamo dimenticare: è Vitellio, sapiente polacco del tredicesimo secolo, di cui abbiamo un trattato di Ottica assai valido per quei tempi, e che fa supporre conoscenze geometriche. Questo Vitellio ci ricorda l'arabo Alhazen, che visse circa un secolo prima di lui e coltivò anch'egli la Matematica con successo. I secoli dell'ignoranza presso i Cristiani furono i secoli dei lumi e del sapere presso gli Arabi; la loro nazione ha prodotto dal nono al quattordicesimo secolo astronomi, geometri, geografi, chimici, e così via. Sembra che si debbano agli Arabi i primi elementi dell'Algebra; ma le loro opere di *Geometria*, di cui qui principalmente si tratta, per la maggior parte non ci sono pervenute o restano ancora in forma manoscritta. Sulla base di una traduzione araba di Apollonio è stata fatta nel 1661 l'edizione dei libri quinto, sesto e settimo di questo autore. Si veda la voce APOLLONIEN. Questa era la traduzione di un geometra arabo chiamato *Abalphat*, vissuto alle fine del decimo secolo. Allora forse fra i Cristiani non c'era alcun geometra in grado di comprendere Apollonio; d'altronde per tradurlo sarebbe stato necessario conoscere nello stesso tempo il greco e la *Geometria*, cosa che non è affatto comune, perfino nel nostro secolo.

Alla rinascita delle lettere ci si limitò quasi soltanto a tradurre e commentare le opere di *Geometria* degli antichi, e questa scienza da allora fece pochi progressi fino a Cartesio: questo grand'uomo pubblicò nel 1637 la sua *geometria*, e la cominciò con la soluzione di un problema di fronte al quale dice Pappo che i matematici antichi si erano fermati. Ma ciò che è ancora più prezioso della soluzione di questo problema è lo strumento di cui egli si servì per raggiungerla e che aprì la strada alla soluzione di un'infinità di altre questioni ancor più difficili. Vogliamo parlare dell'applicazione dell'Algebra alla *Geometria*, applicazione di cui faremo sentire il merito e l'uso nel seguito di questo articolo: era il più grande passo compiuto dalla *Geometria* dopo Archimede ed è all'origine dei sorprendenti progressi fatti da questa scienza in seguito.

Si devono a Cartesio non solo l'applicazione dell'Algebra alla *Geometria*, ma anche le prime applicazioni della *Geometria* alla Fisica, che si sono spinte così lontano in questi ultimi tempi. Queste applicazioni, che si vedono principalmente della sua *diottrica* e in qualche luogo delle sue *meteore,* facevano dire a questo filosofo che tutta la sua *fisica* altro non era che *Geometria*: essa ne avrebbe tratto miglior giovamento se avesse avuto in effetti questo vantaggio, ma malauguratamente la fisica di Cartesio consisteva in ipotesi piuttosto che in calcoli, e l'Analisi in seguito ha dimostrato l'inconsistenza della maggior parte di queste ipotesi. E così la *Geometria,* che deve tanto a Cartesio, è quella che ha arrecato maggior nocumento alla fisica. Ma questo grand'uomo ha nondimeno la gloria di avere applicato per primo con qualche successo la *Geometria* alla scienza della natura, così come ha il merito di essere stato il primo a pensare che ci fossero delle leggi del movimento, sebbene sia caduto in errore su queste leggi. Si veda la voce COMMUNICATION DU MOUVEMENT.

Mentre Cartesio apriva un nuovo corso nella *Geometria*, altri matematici seguivano anche nuove vie in altri campi e preparavano, seppure debolmente, questa *Geometria* dell'infinito che con l'aiuto dell'Analisi doveva fare in seguito così grandi progressi. Nel 1635, due anni prima della pubblicazione della *Geometria* cartesiana, Bonaventura Cavalieri, religioso italiano dell'ordine dei Gesuati, che più non sussiste, aveva donato la sua *geometria degli indivisibili*: in quest'opera egli considera le superfici come formate da infinite successioni di linee, che egli denomina *quantità indivisibili,* e i solidi come formati da infinite successioni di superfici, e in questo modo giunse a trovare la superficie di certe figure e la solidità di certi corpi. Poiché l'uso dell'infinito alla maniera di Cavalieri era allora una novità in *Geometria*, questo religioso, temendo delle obiezioni, cercò di addolcire il termine infinito sostituendolo col termine *indefinito,* che in fondo per l'occasione aveva il medesimo significato. Malgrado questa sorta di palliativo, ebbe molti avversari; però ebbe anche dei fautori, i quali adottando l'idea di Cavalieri la resero più esatta: sostituirono alle linee che componevano le superfici di Cavalieri dei parallelogrammi infinitamente piccoli e sostituirono alle superfici indivisibili di Cavalieri dei solidi di uno spessore infinitamente piccolo; considerarono le curve come poligoni dai lati infiniti e in questo modo giunsero a trovare la superficie di certi spazi curvilinei, la rettificazione di certe curve, la misura di alcuni solidi, i centri di gravità degli uni e degli altri. Gregorio di Saint-Vincent, e soprattutto Pascal, si distinsero entrambi in questo campo. Il primo, col suo trattato sulla *quadratura del cerchio e dell'iperbole* (1647), in cui mescolò qualche paralogismo con teoremi assai belli; il secondo, col suo trattato sulla *roulette* ovvero *cicloide* (si veda la voce CICLOIDE), che sembra avere richiesto i più grandi sforzi dello spirito: ciò perché non si era trovato ancora il modo di rendere la *Geometria* dell'infinito molto più facile applicandovi il calcolo.

Tuttavia il momento di questa felice scoperta si avvicinava. Fermat fu il primo a concepire il metodo delle tangenti mediante le differenze; Barrow lo perfezionò immaginando il suo piccolo triangolo differenziale e servendosi del calcolo analitico per scoprire il rapporto dei piccoli lati di questo triangolo, e in tal modo la sotto-tangente delle curve. Si veda la voce DIFFÉRENTIEL.

Da un altro canto si rifletté che i piani o i solidi infinitamente piccoli, da cui si può supporre che prendano forma le superfici o i solidi, crescono o decrescono in ciascuna superficie o in ciascun solido seguendo leggi differenti, e che così la ricerca della misura di queste superfici o di questi solidi si riduceva alla conoscenza della somma di una serie o di una infinita successione di quantità crescenti o decrescenti. Pertanto ci si applicò alla ricerca della somma delle successioni; è ciò che si chiamò *aritmetica degli infiniti*; si giunse a sommarne parecchi e si applicarono alle figure geometriche i risultati di questo metodo. Wallis, Mercator, Brouncker, Jacques Grégori, Huyghens e qualche altro si segnalarono in questo genere e fecero di più: ridussero certi spazi e certi archi di curve in serie convergenti, vale a dire i cui termini andavano sempre diminuendo, e di qui dettero il mezzo per trovare il valore di questi spazi e di questi archi, se non esattamente, almeno per approssimazione, perché ci si avvicinava al vero valore tanto più quanto più grande si prendeva un numero di termini della successione o serie infinita che lo esprimeva. Si vedano le voci SUITE, SÉRIE, APPROXIMATION eccetera.

Tutti i materiali del calcolo differenziale erano pronti ormai e non restava da fare che l'ultimo passo. Leibniz fu il primo a pubblicare nel 1684 le regole di questo calcolo che Newton dal canto suo aveva già trovato. Noi abbiamo discusso sotto la voce DIFFÉRENTIEL la questione se Leibniz possa esserne considerato come inventore. Gli illustri fratelli Bernoulli trovarono le dimostrazioni delle regole date da Leibniz e Jean Bernoulli qualche anno dopo vi aggiunse il metodo di differenziare le quantità esponenziali. Si veda la voce EXPONENTIEL.

Newton ha contribuito non meno ai progressi della *Geometria* pura con altre due opere: una è il suo trattato *sulla quadratura delle curve*, nel quale egli insegna il modo di quadrare le curve mediante il calcolo integrale, che è l'inverso del differenziale, o di ridurre la quadratura delle curve, quando possibile, a quella di altre curve più semplici, principalmente del cerchio e dell'iperbole; l'altra opera è la sua *enumerazione delle linee del terzo ordine*, dove egli, applicando felicemente il calcolo alle curve la cui equazione è del terzo grado, divide queste curve in generi e specie e ne fa l'enumerazione. Si veda la voce COURBE.

Ma questi scritti, per quanto ammirevoli siano, non sono niente, per così dire, se paragonati all'immortale opera del medesimo autore intitolata *Philosophiae naturalis principia matematica*, che può essere considerata come l’applicazione più estesa, più ammirevole e più felice che sia stata mai fatta della *Geometria* alla Fisica: questo libro oggi è troppo conosciuto, perciò non aggiungiamo maggiori dettagli. È stata l’epoca di una rivoluzione nella Fisica: egli ha fatto di questa scienza una scienza nuova, tutta fondata sull’osservazione, sull’esperienza e sul calcolo. Si vedano le voci NEWTONIANISME, GRAVITATION, ATTRACTION, eccetera. Qui non parliamo dell’*ottica* del medesimo autore, opera non meno degna di elogi ma che non è pertinente a questo articolo, né di qualche altro scritto geometrico meno importante, tutti però di prima forza, tutti brillanti di sagacia e inventiva, come la sua *analysis per aequationes numero terminorum infinitas,* la sua *analysis per aequationum series, fluxiones et differentias*, il metodo dei flussi, il metodo differenziale, eccetera. Quando si considerano questi monumenti immortali del genio del loro autore, e quando si considera che questo grand’uomo aveva fatto le sue principali scoperte a soli ventiquattro anni, si è quasi tentati di sottoscrivere ciò che dice Pope, che la sagacia di Newton sbalordì le intelligenze celesti e che queste guardarono a lui come a un essere intermedio fra l’uomo e loro stesse: d’altronde è ben fondata l’esclamazione *homo homini quid praestat!* ossia: quale distanza c’è fra un uomo e un altro uomo!

L’edificio innalzato da Newton ha questa immensa altezza, pur non essendo stato portato a termine; il calcolo integrale in seguito è stato estremamente perfezionato da Bernoulli, Cotes, Maclaurin e altri e dai matematici venuti dopo di loro. Si veda la voce INTÉGRAL. Sono state fatte applicazioni ancora più raffinate e oseremmo dire più difficili, più felici e più esatte della *Geometria* alla Fisica. È stato aggiunto molto a ciò che Newton aveva intrapreso circa il sistema del mondo: soprattutto sotto questo aspetto è stata corretta e perfezionata la sua grande opera sui *Principi matematici*. Quanto alla maggior parte dei matematici ancora viventi che hanno contribuito ad arricchire la *Geometria* mediante le loro scoperte e ad applicarle alla Fisica e all’Astronomia, avendo partecipato forse anche noi in qualche misura a questi lavori, lasceremo ai posteri il compito di rendere a ciascuno la giustizia che merita, e termineremo qui questa breve storia della *Geometria*: chi vorrà istruirsi più a fondo, potrà consultare i diversi autori che hanno scritto su questo argomento. Fra costoro ce ne sono di quelli che non sempre sono precisi, e fra gli altri Wallis, che deve essere letto con cautela a causa della sua parzialità a favore degli Inglesi. Si veda la voce ALGEBRE. Ma noi crediamo che si troverà tutto ciò che si possa desiderare su questo argomento nella *storia della Matematica* in corso di preparazione ad opera di de Montucla, membro dell'accademia reale delle Scienze e delle Belle Lettere di Prussia, già noto per la sua *storia della quadratura del cerchio* pubblicata nel 1754, da noi citata alla voce *DUPLICATION*.

Il compendio storico che abbiamo presentato è più che sufficiente in un'opera come la nostra, dove dobbiamo dedicarci principalmente a far conoscere gli inventori – non dettagliatamente gli inventori ai quali la *Geometria* deve qualche proposizione particolare e isolata, ma gli spiriti davvero creatori, gli inventori in grande, che hanno aperto delle strade, perfezionato lo strumento delle scoperte e immaginato dei metodi. Per il resto, nel porre termine a questa storia, non possiamo dispensarci dal rimarcare ad onore della nostra nazione che, se la nuova *Geometria* è dovuta principalmente agli Inglesi e ai Tedeschi, è ai Francesi che si debbono le due grandi idee che hanno condotto a trovarla. Si deve a Cartesio l'applicazione dell'Algebra alla *Geometria* sulla quale si fonda il calcolo differenziale e si deve a Fermat la prima applicazione del calcolo alle quantità differenziali per trovare le tangenti: la nuova *Geometria* altro non è se non la generalizzazione di questo metodo. Se a ciò si aggiunge ciò che i Francesi attualmente viventi hanno fatto in *Geometria,* si converrà forse che questa scienza non deve meno alla nostra nazione rispetto alle altre.

Quanto all'*oggetto della Geometria*, pregheremo in primo luogo il lettore di rammentare ciò che abbiamo detto su questo argomento nel *Discorso preliminare*. Noi cominciamo col considerare i corpi con tutte le loro proprietà sensibili, poi poco a poco mediante lo spirito operiamo la separazione e l'astrazione di queste differenti proprietà, e giungiamo a considerare i corpi come porzioni di estensione penetrabili, divisibili e figurate. Così il corpo geometrico in senso proprio altro non è che una parte di estensione finita in ogni senso. Dapprima come in uno sguardo generale consideriamo questa parte di estensione con riguardo alle sue tre dimensioni, mentre in seguito, per determinarne più agevolmente le proprietà, partiamo dal considerare una sola dimensione, cioè la lunghezza, poi le due dimensioni, cioè la lunghezza e la superficie, infine le tre dimensioni insieme, cioè lunghezza, superficie e solidità: così le proprietà delle linee, quelle delle superfici e quelle dei solidi sono l'oggetto e la suddivisione naturali della *Geometria*.

È per una semplice astrazione dello spirito che si considerano le linee come senza larghezza e le superfici senza profondità; la *Geometria* dunque raffigura i corpi in uno stato di astrazione in cui essi non sono realmente. Le verità che essa scopre e dimostra sui corpi sono verità di pura astrazione, verità ipotetiche; ma queste verità non sono meno utili. In natura, per esempio, non esiste il cerchio perfetto; ma più un cerchio naturale si avvicinerà ad esserlo, più si avvicinerà ad avere esattamente e rigorosamente le proprietà del cerchio perfetto che la *Geometria* dimostra, e potrà avvicinarvisi in modo abbastanza esatto per avere tutte queste proprietà, se non in modo rigoroso, almeno in un grado sufficiente per il nostro uso.

Si conoscono in *Geometria* parecchie curve che si avvicinano continuamente a una linea retta senza mai incontrarla, ma che una volta tracciate su carta si confondono sensibilmente con una linea retta alla fine di uno spazio abbastanza piccolo, si veda la voce ASYMPTOTE; tuttavia sono ugualmente delle verità geometriche. Esse sono in qualche modo il limite o, se così si può dire, l'*asintoto* delle verità fisiche, il termine a cui possono avvicinarsi quanto si voglia, senza mai arrivare esattamente ad esso. Ma se i teoremi matematici non hanno luogo in natura in maniera esatta, cionondimeno questi teoremi servono a trovare con una precisione sufficiente ai fini pratici la distanza inaccessibile da un luogo a un altro, la misura di una superficie data, l'altezza di un solido; a calcolare il movimento e la distanza dei corpi celesti, a prevedere i fenomeni celesti. Per dimostrare delle verità in modo estremamente rigoroso, quando si tratta della figura dei corpi, si è obbligati a considerare questi corpi in uno stato di perfezione astratta che essi non posseggono realmente: in effetti, se non ci assoggettiamo, ad esempio, a considerare il cerchio come perfetto, ci sarà bisogno di tanti differenti teoremi sul cerchio che si immagineranno figure differenti più o meno prossime al cerchio perfetto, e anche queste stesse figure potranno essere ancora assolutamente ipotetiche e non avere modelli esistenti in natura. Le linee che si considerano in *Geometria* non sono né perfettamente rette né perfettamente curve, le superfici non sono né perfettamente piane né perfettamente curvilinee: ma più esse si avvicineranno ad esserlo, più si avvicineranno ad avere le proprietà che si dimostrano delle linee esattamente rette o curve, delle superfici esattamente piane o curvilinee. Queste riflessioni basteranno, mi sembra, come risposta a due specie di censori della *Geometria*: gli uni, gli Scettici, accusano i teoremi matematici di falsità, in quanto suppongano ciò che non esiste realmente, linee senza larghezza, superfici senza profondità; gli altri, i fisici ignoranti in Matematica, considerano le verità della *Geometria* come fondate su ipotesi inutili, come dei giochi di spirito che non abbiano applicazione reale.

Divisione della Geometria. Si può dividere la *Geometria* in diversi modi.

1°. Elementare e trascendente. La *Geometria* elementare considera soltanto le proprietà delle linee rette, delle linee circolari, delle figure e dei solidi più semplici, vale a dire delle figure rettilinee e circolari e dei solidi delimitati da dette figure. Il cerchio è la sola figura curvilinea di cui si tratta negli elementi della *Geometria;* la semplicità della sua descrizione, la facilità con cui si deducono le proprietà del cerchio, e la necessità di servirsi del cerchio per differenti operazioni assai semplici, come per innalzare una perpendicolare, misurare un angolo, eccetera, tutte queste ragioni hanno indotto a far entrare il cerchio e soltanto il cerchio negli elementi della *Geometria.* Tuttavia alcune curve, come la parabola, hanno un'equazione più semplice di quella del cerchio; altre, come l'iperbole equilatera, hanno un'equazione anch'essa semplice, si vedano le voci EQUATION e COURBE: ma la loro descrizione è molto meno facile di quella del cerchio e le loro proprietà sono meno agevoli da dedurre. Si può ricondurre alla *Geometria* elementare anche la soluzione dei problemi del secondo grado per la linea retta e per il cerchio. Si vedano le voci CONSTRUCTION, COURBE e ÉQUATION.

La *Geometria* trascendente è in senso proprio quella che ha per oggetto tutte le curve differenti dal cerchio, come le sezioni coniche e le curve di un genere più elevato. Si veda la voce COURBE. Questa *Geometria* si occupa anche della soluzione dei problemi del terzo e del quarto grado e dei gradi superiori. I primi, com'è noto, si risolvono mediante le due sezioni coniche, o più semplicemente e in generale mediante un cerchio e una parabola; gli altri si risolvono mediante linee del terzo ordine o oltre. Si vedano la voce COURBE e le altre voci già citate. La parte della *Geometria* trascendente che applica il calcolo differenziale e integrale alla ricerca delle proprietà delle curve è quella che per l'appunto è denominata *Geometria trascendente* e che si potrebbe chiamare con qualche altro autore moderno *Geometria sublime*, per distinguerla non soltanto dalla *Geometria* elementare, ma anche dalla *Geometria* delle curve che non impiega i calcoli differenziali e integrali, e si limita o alla sintesi degli antichi o alla semplice applicazione dell'analisi ordinaria. Quindi si avrebbero tre divisioni della *Geometria*: *Geometria elementare* o delle linee rette e del cerchio: *Geometria trascendente* o delle curve; *Geometria sublime* o dei nuovi calcoli.

2°. La *Geometria* si divide anche in antica e moderna. Per *Geometria antica* s'intende o quella che non impiega affatto il calcolo analitico o quella che impiega il calcolo analitico ordinario, senza servirsi dei calcoli differenziale e integrale. Per *Geometria moderna* s'intende o quella che impiega l'analisi di Cartesio nella ricerca delle proprietà delle curve o quella che si serve nei nuovi calcoli. Così la *Geometria*, fin tanto che si limita alla sola analisi di Cartesio, è antica o moderna, secondo i rapporti sotto i quali la si consideri; moderna rispetto a quella di Apollonio e di Archimede, che non usavano affatto il calcolo, antica rispetto in rapporto alla *Geometria* che noi abbiamo denominata *sublime*, che ci hanno insegnato Leibniz e Newton e che i loro successori hanno perfezionato.

Sugli elementi della Geometria. Sono stati dati alla voce ÉLÉMENS DES SCIENCES quei principi che si applicano naturalmente agli elementi della *Geometria*: vi sono trattate anche delle questioni che hanno un rapporto particolare con questi elementi; per esempio, se negli elementi di una scienza si debba seguire l'ordine degli inventori, se sia da preferire la facilità al rigore dell'esattezza, eccetera. È per questo che rinviamo alla voce ÉLÉMENS. Ci limitiamo a osservare che nella lista di elementi di *Geometria* dataci da de la Chapelle sono stati dimenticati quelli di Camus dell'accademia delle Scienze, composti per l'uso degli ingegneri e meritevoli di una menzione d'onore così come la *Geometria dell'ufficiale* di le Blond, uno di noi colleghi, e gli *elementi di Geometria* del medesimo autore. Aggiungiamo qui alcune riflessioni che potrebbero essere non inutili sul modo di trattare gli *elementi della Geometria*.

Osserveremo innanzitutto, e questa è una nota poco importante, ma utile, che la divisione ordinaria della *Geometria* elementare in Longimetria, Planimetria e Stereometria non è affatto esatta, se si vuole parlare con rigore, perché vi si misurano non soltanto linee rette, piani e solidi, ma anche linee circolari e superfici sferiche; ma noi non possiamo che approvare la divisione naturale della *Geometria* elementare in *geometria* delle linee rette e delle linee circolari, *geometria* delle superfici, *geometria* dei solidi.

Sotto la voce COURBE si può vedere ciò che noi pensiamo circa la migliore definizione possibile di linea retta e linea curva. Sebbene la linea retta sia più semplice della linea circolare, tuttavia è appropriato trattare l'una e l'altra insieme e non separatamente negli elementi di *Geometria*, perché le proprietà della linea circolare sono di un'utilità infinita per dimostrare in una maniera semplice e facile ciò che riguarda le linee rette comparate fra loro quanto alla loro posizione. La misura di un angolo è un arco di cerchio descritto dal vertice dell'angolo come raggio. Si è visto alla voce DEGRÉ, pagine 761-762 del IV volume, il motivo per cui il cerchio è la misura naturale degli angoli. Ciò deriva dall'uniformità delle parti e dalla curvatura del cerchio; e quando si dice che la misura di un angolo è un arco di cerchio descritto dal suo vertice, ciò significa soltanto che, se due angoli sono eguali, gli archi descritti dai loro vertici e di raggio uguale saranno uguali: analogamente, quando si dice che un angolo è il doppio di un altro, ciò significa soltanto che l'arco descritto dal vertice dell'uno è il doppio dell'arco descritto dal vertice dell'altro, perché l'angolo non essendo altro, per definizione, che una semplice apertura, non un'estensione, non si può dire propriamente e fatta astrazione da ogni considerazione di estensione che un angolo sia il doppio di un altro, sia perché ciò si può dire soltanto di una quantità paragonata a un'altra quantità omogenea, sia perché l'apertura di due linee, non avendo parti, non è propriamente una quantità. Allo stesso modo, quando si dice che un angolo alla circonferenza del cerchio ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati, ciò significa che questo angolo è eguale a un angolo il cui vertice sarebbe al centro e che racchiuderebbe la metà di quest'arco; e così via.

Queste osservazioncelle non saranno inutili per dare ai principianti distinte nozioni sulla misura degli angoli e per far sentire loro, come abbiamo detto alla voce ÉLÉMENS, qual è il vero senso che bisogna dare a certi modi di parlare in forma abbreviata di cui ci si serve in ogni scienza e che gli inventori hanno immaginato per evitare le circonlocuzioni. L'enunciato assai semplice sulla misura degli angoli mediante un arco descritto dai loro vertici, essendo unito al principio della sovrapposizione, può servire, se non erro, a dimostrare tutti gli enunciati che sono in relazione con la *Geometria* elementare delle linee. Il principio di sovrapposizione non è affatto un principio meccanico e grossolano, come dicono alcuni moderni geometri; è un principio rigoroso, chiaro, semplice, desunto dalla vera natura della cosa. Ad esempio, quando si vuole dimostrare che due triangoli che hanno uguali le basi e gli angoli alla base sono del tutto uguali, si applica con successo il principio della sovrapposizione: dalla supposizione dell'uguaglianza delle basi e degli angoli si conclude a ragione che questi angoli e queste basi in seguito all'applicazione degli uni sulle altre coincideranno, quindi dalla coincidenza di queste parti si conclude in tutta evidenza per necessaria conseguenza la coincidenza del resto e ancora per conseguenza l'uguaglianza e la perfetta similitudine dei due triangoli: così il principio della sovrapposizione non consiste nell'applicare grossolanamente una figura sull'altra, per concluderne l'uguaglianza delle due, come un operaio applica il suo piede su una lunghezza per misurarla, ma questo principio consiste nell'immaginare una figura trasportata su un'altra e concludere, 1°. dalla supposizione dell'uguaglianza delle parti date la coincidenza di queste parti; 2°. da questa coincidenza la coincidenza del resto e di conseguenza l'uguaglianza totale e la similitudine perfetta delle due figure. Allo stesso modo si può usare il principio della sovrapposizione per provare che due figure non sono identiche. Del resto, per sovrapposizione io qui intendo non solo l'applicazione di una figura su un'altra, ma quella di una parte di una figura su un'altra parte della medesima figura al fine di paragonarle fra loro, e quest'ultima maniera di impiegare il principio di sovrapposizione è di un'utilità infinita e semplicissima negli elementi di *Geometria*. Si veda la voce CONGRUENCE.

Dopo aver trattato la *geometria* delle linee considerate in rapporto alla loro posizione, credo che si debba trattare la *geometria* delle linee considerate riguardo al rapporto che esse possono avere fra di loro. Quest'altro aspetto della geometria è fondato tutto su questo teorema: una linea parallela alla base di un triangolo ne taglia i lati in proporzione. Per dimostrarlo, basta mostrare che se questa parallela passa per il punto di mezzo di uno dei lati, passerà per il punto di mezzo dell'altro; perché di seguito si farà constatare agevolmente che le parti tagliate sono sempre proporzionali quando la parte tagliata sarà commensurabile all'intera linea, e quando non lo sarà, si dimostrerà il medesimo enunciato mediante la *reductio ad absurdum*, facendo vedere che il rapporto non può essere né più grande né più piccolo e di qui che è uguale. Noi diciamo mediante la riduzione all'assurdo, perché solo in questo modo indiretto si può dimostrare la maggior parte degli enunciati che riguardano gli incommensurabili. L'idea dell'infinito entra almeno implicitamente nella nozione di questi tipi di quantità; e poiché noi non abbiamo un'idea dell'infinito se non negativa, vale a dire che lo concepiamo soltanto mediante la negazione del finito, si può dimostrare direttamente e *a priori* tutto ciò che concerne l'infinito matematico. Si vedano le voci DÉMONSTRATION, INFINI e INCOMMENSURABLE. Noi non facciamo altro che indicare questo genere di dimostrazioni; ma ce ne sono tanti esempi nelle opere di *Geometria* che i matematici, per quanto poco siano esercitati, ci comprenderanno agevolmente. Per evitare la difficoltà degli incommensurabili, l'enunciato di cui si tratta lo si dimostra ordinariamente supponendo che due triangoli della medesima altezza siano in rapporto fra loro come le loro basi. Ma questo medesimo enunciato, per essere dimostrato con rigore, presuppone che si sia parlato degli incommensurabili. D'altronde esso presuppone la misura dei triangoli e di conseguenza la *geometria* delle superfici, che è di un ordine superiore rispetto alla *geometria* delle linee. È quindi deviare dalla genealogia naturale delle idee procedere in questo modo. Si dirà forse che la considerazione degli incommensurabili renderà la *geometria* elementare più difficile; può darsi; ma essi entrano necessariamente in questa *geometria*; presto o tardi bisogna arrivarci, ed è meglio presto, tanto più che la teoria della proporzione delle linee comporta naturalmente questa considerazione: tutta la teoria degli incommensurabili non esige che una sola proposizione, che concerne i limiti delle quantità: sapere che le grandezze che sono il limite di una medesima grandezza, o le grandezze che hanno un medesimo limite, sono uguali fra loro (si vedano le voci LIMITE, EXHAUSTION e DIFFÉRENTIEL); principio, questo, di uso universale in *Geometria*, dal che consegue che esso deve rientrare negli elementi di questa scienza e trovarvisi quali all'ingresso.

La *geometria* delle superfici si riduce alla loro misura, e questa misura si fonda su un solo principio, quello della misura del parallelogramma rettangolo , che si sa essere il prodotto dell'altezza per la base. Abbiamo spiegato alla fine della voce EQUATION il significato di ciò e il modo in cui questa proposizione deve essere enunciata negli elementi, per non lasciare alcuna nube nello spirito. Dalla misura del parallelogramma rettangolo si ricava quella degli altri parallelogrammi, quella dei triangoli che ne sono la metà, come il principio di sovrapposizione può far vedere, e infine quella di tutte le figure piane rettilinee, che possono essere considerate come composte da triangoli. Riguardo alla misura del cerchio, servirà a trovarla il principio dei limiti o di esaustione. Per questo basterà mostrare che il prodotto della circonferenza per la metà del raggio è il limite dell'area dei poligoni iscritti e circoscritti; e poiché l'area del cerchio è con tutta evidenza questo limite, ne consegue che l'area del cerchio è il prodotto della circonferenza per la metà del raggio o del raggio per la metà della circonferenza. Si vedano le voci CERCLE e QUADRATURE.

Si può accostare la teoria della proporzione delle linee alla teoria delle superfici mediante questo teorema: quando quattro linee sono proporzionali, il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi; teorema che si può dimostrare mediante la *Geometria* senza bisogno di alcun calcolo algebrico, perché il calcolo algebrico non facilita in nulla gli elementi della *Geometria* e per conseguenza non può entrarvi. Avvicinando la teoria delle proporzioni a quella delle superfici, si può mostrare come queste due teorie prese separatamente si accordino a dimostrare differenti enunciati, per esempio quello del quadrato dell'ipotenusa. Non è una cosa così inutile, come si potrebbe pensare, dimostrare in modi diversi negli elementi di *Geometria* certi enunciati principali: in questo modo lo spirito si estende e si fortifica, vedendo come si fanno rientrare le verità le une nelle altre.

Nella *geometria* dei solidi si seguirà il medesimo metodo di quella delle superfici: si ridurrà tutto alla misura del parallelepipedo rettangolo; la sola difficoltà si ridurrà a provare che una piramide è il terzo di un parallelepipedo di uguale base e uguale altezza. Per questo si farà vedere in primo luogo, cosa che è assai facile mediante il metodo di esaustione, che le piramidi di uguale base e uguale altezza sono uguali; quindi, cosa che si può fare in diversi modi, come si può vedere in diversi elementi di *Geometria*, si dimostrerà che una certa determinata piramide è il terzo di un prisma di uguale base e uguale altezza, e non resterà più alcuna difficoltà. In questo modo si avrà la misura di tutti i solidi i cui termini sono figure piane. Non resterà che applicare alla superficie e alla solidità della sfera gli enunciati trovati sulla misura delle superfici e dei solidi; di qui si giungerà agevolmente a concludere mediante il metodo di esaustione, come si è fatto per la misura del cerchio; forse si potrebbe anche per maggiore ordine metodico trattare la superficie sferica nella *geometria* delle superfici.

A questo punto non dobbiamo dimenticarci di un'osservazione importante. Il principio del metodo di esaustione è semplice (si veda la voce EXHAUSTION); ma la sua applicazione talvolta può rendere le dimostrazioni lunghe e complicate. E così non sarebbe male sostituire il principio degli infinitamente piccoli a quello di esaustione, dopo avere mostrato l'identità di questi due principi e avere sottolineato che il primo non è altro che un modo abbreviato di esprimere il secondo, perché è in effetti tutto quello che esso è, non essendovi in natura né infiniti attuali né infinitamente piccoli. Si vedano le voci INFINI, DIFFÉRENTIEL, EXHAUSTION e LIMITE. In questo modo la facilità delle dimostrazioni sarà maggiore, senza che il rigore abbia a risentirne.

Ecco, mi sembra, il piano che si può seguire trattando la *geometria elementare*. Questo piano e le riflessioni generali che abbiamo fatto alla fine della voce ÉLÉMENS DES SCIENCES bastano per far capire che non c'è alcun geometra al di sopra di una simile impresa, che essa può essere ben compiuta soltanto da matematici di primo ordine, e infine che, per fare eccellenti elementi di *geometria*, Cartesio, Newton, Leibniz, Bernoulli, eccetera, non sarebbero stati di troppo. Tuttavia forse non c'è scienza sulla quale siano stati tanto moltiplicati gli elementi, senza contare quelli che senza dubbio ci saranno ancora offerti. Questi elementi sono per la maggior parte opera di matematici mediocri, le cui conoscenze in *Geometria* spesso non vanno al di là del loro libro e che per questo stesso motivo sono incapaci di trattar bene questa materia. Aggiungiamo che non c'è quasi nessun autore di elementi di *Geometria* che nella sua prefazione non dica più o meno male di tutti quelli che l'hanno preceduto. In questo genere un'opera che sarebbe gradita a tutti è ancora da realizzare, ma forse può essere un'impresa chimerica credere di poterla realizzare con universale gradimento. Tutti coloro che studiano la Geometria non la studiano con le stesse vedute: gli uni si vogliono limitare alla pratica e per costoro basta un buon trattato di *geometria pratica*, aggiungendo ad esso, volendo, qualche ragionamento che chiarisca le operazioni fino a un certo punto e impedisca loro di limitarsi a una cieca routine; altri voglio avere un'infarinatura di *geometria elementare* speculativa, senza pretendere di spingere questo studio più avanti e per questi non è necessario mettere grande rigore negli elementi: si possono supporre vere diverse proposizioni la cui verità si manifesta di per se stessa e la si dimostra negli elementi ordinari. Ci sono infine degli studenti che non hanno la forza di spirito necessaria per abbracciare in una volta sola le differenti branche di una dimostrazione complicata: costoro hanno bisogno di dimostrazioni più facili, anche se fossero meno rigorose. Ma per gli spiriti veramente adatti a questa scienza, per coloro che sono destinati a farvi dei progressi, noi crediamo che ci sia una sola maniera di trattare gli elementi: quella che unirà il rigore alla chiarezza e che allo stesso tempo li metterà sulla via delle scoperte per il modo in cui si presenteranno le dimostrazioni. Per questo bisogna mostrarle, per quanto possibile, sotto la forma di problemi da risolvere piuttosto che della dimostrazione di teoremi, purché d'altro canto questo metodo non noccia alla genealogia naturale delle idee e degli enunciati e non impegni a supporre come vero ciò che nel rigore geometrico ha bisogno di prove.

Si è visto sotto la voce AXIOME di quale inutilità sia questa sorta di principi in tutte le scienze; è dunque molto a proposito sopprimerli negli elementi di *Geometria,* sebbene non vi sia quasi alcun punto in cui non li si veda ancora apparire. Che bisogno c'è di assiomi sul tutto e sulla parte per vedere che la metà di una linea è più piccola di una linea intera? Riguardo alle definizioni, quali che siano quelle necessarie in un'opera del genere, a noi sembra poco filosofico e poco conforme alla naturale impronta dello spirito presentarle di primo acchito bruscamente e senza una sorta di analisi, dicendo, ad esempio, che *la superficie è l'estremità di un corpo priva di ogni profondità*. È meglio considerare dapprima il corpo così come esso è, e mostrare come mediante astrazioni successive si giunga a considerarlo come semplicemente esteso e dotato di figura, e mediante nuove astrazioni a considerare successivamente la superficie, la linea e il punto. Aggiungiamo qui che si trovano casi, se non negli elementi, almeno in un corso completo di *Geometria*, in cui certe definizioni non possono essere ben collocate se non dopo l'analisi del loro oggetto. Si crede, per esempio, che una semplice definizione dell'algebra ne darà l'idea a colui che ignora detta scienza? Sarebbe dunque appropriato cominciare un trattato di Algebra con lo spiegare chiaramente la strada seguendo la quale lo spirito è giunto o può giungere a trovarne le regole, e l'opera la si farà terminare così: *la scienza che abbiamo finora insegnato è la scienza che si chiama Algebra.* Ciò vale anche per l'applicazione dell'Algebra alla *Geometria* e per il calcolo differenziale e integrale, di cui non si può afferrare bene la vera definizione se non dopo averne compreso la metafisica e l'uso.

Ritorniamo agli elementi di *Geometria*. Un inconveniente forse più grande dell'allontanarsi dall'esatto rigore che raccomandiamo sarebbe l'impresa chimerica di volervi cercare un rigore immaginario. Bisogna supporre l'estensione come tutti la concepiscono, senza darsi pensiero delle difficoltà dei sofisti sull'idea che noi ce ne formiamo, come si suppone in meccanica il movimento senza rispondere alle obiezioni di Zenone di Elea. Bisogna supporre per astrazione le superfici piane e le linee rette, senza darsi pensiero di provarne l'esistenza, e non imitare un moderno geometra che in base alla sola idea di un filo teso crede di poter dimostrare le proprietà della linea retta indipendentemente dal piano e non accetta questa ipotesi, che si possa immaginare una linea retta condotta da un punto a un altro su una superficie piana, come se l'idea di un filo teso per rappresentare una linea retta fosse più semplice e più rigorosa dell'ipotesi in questione, o piuttosto come se questa idea non avesse l'inconveniente di rappresentare un'ipotesi astratta e matematica mediante un'immagine fisica grossolana e imperfetta.

Geometria trascendente o delle curve. Questa *Geometria* comporta il calcolo algebrico. Si vedano le voci ALGEBRE e MATHÉMATIQUES. La si deve iniziare dalla soluzione dei problemi di secondo grado per mezzo della linea retta e del cerchio. Questa teoria può produrre molte osservazioni importanti e curiose sulle radici positive e negative, sulla posizione delle linee che le esprimono, sulle differenti soluzioni di cui un problema è suscettibile. Si veda sotto la voce EQUATION la maggior parte di queste osservazioni, che non si trovano negli ordinari trattati di *Geometria;* si veda anche la voce RACINE. Di lì si passerà alle sezioni coniche; il modo migliore e più breve di trattarle in un'opera di *Geometria* (che non si limita a questo solo argomento) è, mi sembra, ricorrere al metodo analitico che abbiamo indicato alla fine della voce CONIQUE, cioè riguardandole come curve del primo genere o linee del secondo ordine e dividendole in specie, secondo quanto se ne è detto alla voce citata e alla voce COURBE. Quando si sarà trovata la più semplice equazione della parabola, quella dell'ellisse, e quella dell'iperbole, si farà vedere di seguito molto agevolmente che queste curve si generano nel cono e in che modo vi si generano. Questa formazione delle sezioni coniche nel cono sarebbe forse il modo in cui le si dovrebbe considerare inizialmente, se ci si limitasse a fare un trattato su queste curve; ma esse debbono entrare in un corso di *Geometria* da un punto di vista più generale. Si concluderà il trattato sulle sezioni coniche con la soluzione dei problemi di terzo e quarto grado mediante queste curve: su ciò si vedano le voci CONSTRUCTION e EQUATION.

La teoria delle sezioni coniche deve essere preceduta da un trattato che conterrà i principi generali dell'applicazione dell'Algebra alle linee curve. Si veda la voce COURBE. Questi principi generali consisteranno: 1°. nello spiegare come si rappresenta mediante un'equazione il rapporto fra ascisse e ordinate; 2°. nel mostrare come la soluzione di questa equazione consenta di riconoscere l'andamento della curva, le sue differenti diramazioni e i suoi asintoti; 3°. nell'offrire il modo di trovare mediante il calcolo differenziale le tangenti e i punti di *massimo* e di *minimo;* 4°. nell'insegnare come si trova l'area delle curve mediante il calcolo integrale: di conseguenza, questo trattato conterrà le regole del calcolo differenziale e integrale, almeno quelle che possono essere utili per abbreviare un trattato sulle sezioni coniche. Forse qualche geometra protesterà qui per l'impiego che vogliamo fare di questi calcoli in una materia in cui se ne può fare a meno; ma noi li rinvieremo a quanto abbiamo detto sull'argomento sotto la voce ELLIPSE, *pagine 517-518 del tomo V*. Lì abbiamo mostrato mediante degli esempi quanto facciano comodo questi calcoli per abbreviare le dimostrazioni e le soluzioni e per ridurre a qualche riga ciò che altrimenti occuperebbe dei volumi. D'altronde alla voce DIFFÉRENTIEL abbiamo dato la metafisica assai semplice e assai luminosa dei nuovi calcoli, e quando si sarà ben spiegata questa metafisica, così come quella dell'infinito geometrico (si veda la voce INFINI), ci si potrà servire dei termini *infinitamente piccolo* e *infinito* per abbreviare le espressioni e le dimostrazioni.

Trattando l'applicazione dell'Algebra alle curve, difficilmente le si rappresenta mediante l'equazione tra le coordinate parallele; ma ci sono anche altre forme, anche se meno utilizzate, per dare ad esse l'equazione. La si può supporre, ad esempio, fra i raggi della curva che partono da un centro e le ascisse o le ordinate corrispondenti, come anche fra questi raggi e la tangente, il seno o la secante dell'angolo che essi formano con le ascisse e le ordinate; se ne vedono degli esempi sotto la voce ELLIPSE. Tutte queste equazioni nelle curve geometriche sono finite e algebriche, ma talvolta ce ne sono di quelle che si presentano o possono presentarsi sotto una forma differenziale; sono quelle, per esempio, nelle quali uno dei membri è la differenziale dell'angolo formato da raggio e ascissa e l'altro è una differenziale di qualche funzione di ascissa o raggio, riducibile a un arco di cerchio […] Questi tipi di equazioni meritano che se ne faccia espressa menzione nella *Geometria* trascendente, in quanto sono molto utili nella teoria delle *traiettorie* o curve descritte da proiettili, si veda la voce TRAJECTOIRE, e di conseguenza nella teoria delle orbite dei pianeti, si vedano ELLIPSE, KEPLER (*loi de*), PLANETE e ORBITE. Si veda anche nelle *Memorie dell'Accademia delle Scienze* del 1710 una memoria di Bernoulli su quest'ultimo argomento.

Terminate le sezioni coniche, si passerà alle curve di genere superiore. Si vedano le voci POINT MULTIPLE, INFLEXION, REBROUSSEMENT, SERPENTEMENT, eccetera. Queste teorie si basano in parte sul calcolo algebrico semplice, in parte e quasi per intero sul calcolo differenziale; non è che questo calcolo vi sia assolutamente necessario, ma checché se ne dica esso abbrevia e facilita estremamente tutta questa teoria. Si vedano anche le voci DÉVELOPPÉE, CAUSTIQUE, OSCULATEUR, eccetera.

Noi non possiamo fare altro che indicare qui questi diversi argomenti, molti dei quali sono stati già trattati nell'Enciclopedia, e gli altri lo saranno alle loro voci singole. Si vedano le voci TANGENTE, *MAXIMUM*, eccetera. Si entrerà poi nel dettaglio delle curve dei differenti ordini, di cui si daranno le classi, le specie e le proprietà principali. Si veda la voce COURBE. Riguardo alla quadratura e alla rettificazione di questi tipi di curve, come anche alla rettificazione delle sezioni coniche, le si rimetterà alla *Geometria sublime*.

Per il resto, trattando le curve geometriche, ci si potrà dilungare un po' più particolarmente sulle più conosciute, come il *folium* di Cartesio, la *concoide*, la *cissoide*, eccetera. Si vedano le voci relative.

Le curve meccaniche faranno seguito a quelle geometriche. Si tratteranno dapprima le curve esponenziali, che sono come una specie intermedia fra le curve geometriche e le meccaniche. Si veda la voce EXPONENTIEL. In seguito, dopo aver dato i principi generali della costruzione delle curve meccaniche, per mezzo della loro equazione differenziale e della quadratura delle curve (si veda la voce CONSTRUCTION), si entrerà nel dettaglio delle principali e più conosciute: *spirale, quadratica, cicloide, trocoide*, eccetera. Si vedano le relative voci. Questi sono pressappoco gli argomenti che un trattato di *Geometria* trascendente deve contenere; noi non facciamo altro che indicarle e rimarcare, per così dire, le materie principali: un geometra intelligente saprà trovare lui stesso, con l'ausilio dei diversi articoli di questo Dizionario, le parti che devono comporre ciascuna di queste materie.

Geometria sublime. Dopo il piano che abbiamo tracciato per la *Geometria* trascendente, si vede che il calcolo differenziale e i suoi usi vi sono quasi esauriti; alla *Geometria sublime* non resta che il calcolo integrale con la sua applicazione alla quadratura e alla rettificazione delle curve. Questo calcolo sarà dunque la materia principale e quasi unica della *Geometria sublime.* Sul modo di trattarlo si veda la voce INTÉGRAL.

Noi termineremo questo articolo con qualche riflessione generale. Si sono viste alla voce APPLICATION delle osservazioni sull'uso dell'analisi e della sintesi in *Geometria*. Su questo articolo ci sono state poste delle questioni che daranno luogo alle seguenti precisazioni.

1°. Il calcolo algebrico non deve essere affatto applicato alle proposizioni della *geometria* elementare, per la ragione che bisogna usare questo calcolo soltanto per facilitare le dimostrazioni, mentre non sembra che nella geometria elementare vi siano dimostrazioni tali da poter essere realmente facilitate da questo calcolo. Cionondimeno per noi fa eccezione a questa regola la soluzione dei problemi di secondo grado mediante la linea retta e il cerchio (supponendo che si voglia considerare questi problemi come appartenenti alla *geometria* elementare e non come il passaggio dalla *geometria* elementare alla trascendente), perché il calcolo algebrico semplifica al massimo la soluzione delle questioni di tal genere e abbrevia anche le dimostrazioni. Per convincersene, basterà rivolgere lo sguardo a qualcuno dei problemi di secondo grado risolti nella *applicazione dell'Algebra alla Geometria* di Guisnée. Dopo aver messo un problema sotto forma di equazione, l'autore da questa equazione ricava la costruzione necessaria per soddisfare l'equazione trovata, e in seguito dimostra sinteticamente e in modo tradizionale che la costruzione da lui impiegata risolve effettivamente il problema. Ora, queste dimostrazioni sintetiche per la maggior parte sono abbastanza complicate e prive di un'utilità che non sia soltanto quella di esercitare lo spirito, perché è sufficiente far vedere che la costruzione soddisfa la soluzione dell'equazione finale per provare che essa dà la soluzione del problema.

2°. Noi crediamo che sia ridicolo dimostrare mediante la sintesi ciò che può essere trattato più semplicemente e più facilmente mediante l'analisi, come le proprietà delle curve, le loro tangenti, i loro punti di inflessione, i loro asintoti, le loro diramazioni, la loro rettificazione e la loro quadratura. Le proprietà della spirale, che i più grandi matematici hanno tanto penato a seguire in Archimede, oggi possono essere dimostrate con un tratto di penna. Dunque non vi sono in *Geometria* abbastanza cose da apprendere, abbastanza difficoltà da superare, abbastanza di scoperte da fare, per non usare tutte le energie del proprio spirito sulle conoscenze che vi si possono acquisire a minor costo? D'altronde, quante le ricerche geometriche alle quali può applicarsi la sola analisi? Gli Inglesi, grandi fautori della sintesi, fidandosi di Newton che la lodava e la usava per celare la strada da lui seguita facendosi guidare dall'analisi, gli Inglesi, dico, per questo motivo sembrano non aver fatto in *Geometria*, dopo questo grand'uomo, tutti i progressi che ad opera loro ci si sarebbe aspettati. Ad altre nazioni, ai Francesi e ai Tedeschi, e soprattutto ai primi, dobbiamo le nuove ricerche sul sistema dell'universo, sulla conformazione della Terra, sulla teoria della luna, sulla precessione degli equinozi, che hanno prodigiosamente esteso l'Astronomia-fisica. Si provi a impiegare per queste ricerche il metodo sintetico e si sentirà quanto esso ne sia incapace. Solo geometri mediocri tengono in poco conto l'analisi, dal momento che possono deplorare un'arte solo quelli che la ignorano. Si trova un po' di conforto nel tacciare di inutilità ciò che non si sa. Noi, è vero, abbiamo esposto altrove qualche inconveniente dell'Algebra, come alla voce EQUATION, *pagina 850*, *tomo V*. Se la sintesi può eliminare questi inconvenienti nei casi in cui ricorrono, saremo d'accordo che almeno in quei casi si dovrebbe preferire la sintesi all'analisi; ma dubitiamo fortemente, per non dire altro, che la sintesi abbia questo vantaggio, e chi la penserà diversamente ci obbligherà a disilluderlo.

3°. In Matematica fra Algebra e Analisi c'è questa differenza: l'Algebra è la scienza del calcolo delle grandezze in generale, e l'Analisi è il mezzo per applicare l'Algebra alla soluzione dei problemi. Io parlo qui dell'*analisi matematica*; l'impiego che essa fa dell'Algebra per trovare le incognite mediante ciò che è noto la distingue dall'*analisi logica,* che in generale non è altro che l'arte di scoprire ciò che non si conosce mediante ciò che si conosce. Gli antichi geometri senza dubbio avevano fatto nelle loro ricerche una specie di analisi; ma in senso proprio non si trattava che di analisi logica. Ogni algebrista se ne serve per cominciare il calcolo, ma in seguito il soccorso dell'Algebra facilita enormemente l'uso e l'applicazione di questa analisi alla soluzione dei problemi. Così, quando noi abbiamo detto alla voce ANALYSE che l'analisi *matematica* insegna a risolvere i problemi, *riducendoli ad equazioni,* crediamo di aver dato una definizione del tutto esatta. Queste ultime parole esprimono il carattere essenziale che distingue l'analisi matematica da tutte le altre, e noi d'altronde non abbiamo fatto altro che conformarci in ciò al linguaggio universalmente accettato da tutti i geometri algebristi.

4°. Si può denominare l'Algebra *geometria simbolica* a causa dei simboli di cui l'Algebra si serve nella soluzione dei problemi; tuttavia il nome di *geometria metafisica* che è stato dato all'Algebra (si veda la voce ALGEBRA) sembra essere almeno altrettanto appropriato, perché il carattere peculiare della Metafisica consiste nel generalizzare le idee e perché l'Algebra non solo esprime gli oggetti della *Geometria* mediante dei caratteri generali, ma può anche facilitare l'applicazione della *Geometria* in altri campi. In effetti si può, per esempio, in Meccanica rappresentare il rapporto di parti del tempo come il rapporto di parti di una linea e il movimento di un corpo mediante l'equazione di una curva le cui ascisse apprestano i tempi e le ordinate le velocità corrispondenti. Dunque la *Geometria*, soprattutto quando è aiutata dall'Algebra, è applicabile a tutte le altre parti della Matematica, giacché in Matematica non si tratta mai di altro se non di paragonare delle grandezze fra loro; e non è senza motivo che alcuni geometri filosofi hanno definito la *Geometria* scienza *della grandezza in generale*, in quanto è rappresentata o può esserlo mediante linee, superfici e solidi. Sull'applicazione della Geometria alle differenti scienze si vedano le voci APPLICATION, MÉCHANIQUE, OPTIQUE, PHYSIQUE, PHYSICO-MATHÉMATIQUES, eccetera. […]

N.B. La voce *Geometria* si conclude con la trattazione della *Géométrie Souterreine,* di cui qui si omette la traduzione. Questa parte potrà essere reperita in rete e costituire l'eventuale oggetto di collaborazione tra docenti di francese, matematica e scienze per allestire lezioni sull'argomento con la partecipazione degli studenti.